

4

费定晖 周学圣 编演
郭大钧 邵品琮 主审

Б.П.吉米多维奇

数学分析

习题集题解

第四版



山东科学技术出版社
www.lkj.com.cn

责任编辑 宋 涛 邱 蕾

封面设计 庞 婕 孙 佳

新版推荐

经典 B. П. 吉米多维奇数学习题集系列

数学分析习题集题解 (共六册)

1 分析引论

定价: 19.00元

2 单变量函数的微分学

定价: 19.00元

3 不定积分 定积分

定价: 20.00元

4 级数

定价: 19.00元

5 多变量函数的微分法 带参数的积分

定价: 22.00元

6 重积分和曲线积分

定价: 19.00元

数学分析习题集精选精解

定价: 39.00元

数学分析习题集——提示·解题思路·答案

定价: 39.00元

高等数学习题精选精解

定价: 39.80元

ISBN 978-7-5331-5897-2



9 787533 158972 >

定价: 19.00 元

4

费定晖 周学圣 编演
郭大钧 邵品璋 主审

Б.П.吉米多维奇
数学分析
习题集题解

第四版

● 山东科学技术出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

Б.П. 吉米多维奇数学分析习题集题解 4/费定晖,周学圣编演. —4 版. —济南:山东科学技术出版社,2012
ISBN 978-7-5331-5897-2

I. ①吉... II. ①费... ②周... III. ①数学分析—高等学校—题解 IV. ①017-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 120148 号

**Б.П. 吉米多维奇
数学分析习题集题解 4**

出版者: 山东科学技术出版社

地址: 济南市玉函路16号

邮编: 250002 电话: (0531) 82098088

网址: www.lkj.com.cn

电子邮件: sdkj@sdpress.com.cn

发行者: 山东科学技术出版社

地址: 济南市玉函路16号

邮编: 250002 电话: (0531) 82098071

印刷者: 山东新华印刷厂潍坊厂

地址: 潍坊市潍州路753号

邮编: 261031 电话: (0536) 2116806

开本: 787 mm × 1092mm 1/16

印张: 14.5

版次: 2012 年 9 月第 1 版第 1 次印刷

ISBN 978-7-5331-5897-2

定价: 19.00 元

第四版前言 DISIBANQIANYAN

本书自 1979 年出版发行以来,历经 30 多个春秋,一直畅销不衰,深得读者厚爱。在郭大钧教授的帮助和指导下,对全书我不断地修订和补充,不断地修正错误,不断地替换更为简洁的解法和证明,力求本书一直保持其先进性、完整性和准确性,以求对读者的高度责任感。读者通过学习该书,对掌握数学分析的基本知识、基础理论和基本技能的训练,感到获益匪浅,赞誉其为学习数学分析“不可替代”之图书,对此我们倍感欣慰,鞭策我们为读者作出更多的奉献。

这次受山东科学技术出版社的约请,并得到郭大钧教授的大力支持,仍由我负责全书第四版的修订、增补和校阅工作,以适应文化建设繁荣发展的需要,更加激发全国广大读者的强烈求知欲。具体主要做了以下几方面的工作:

第一,为全书 4462 题中的近三成的习题,根据题型的不同,在原题解的前面,分别或给出提示,或给出解题思路,或给出证明思路。冀图启发读者怎样分析该题,怎样下手求解;启发读者怎样总结解题的规律;启发读者怎样正确使用有关的数学公式、概念和理论,开拓视野,活跃思路;帮助读者逐步解决学习中的困难,为他们在学習过程中提供一个良师益友。这是本次修订的主要工作。

第二,根据当前的语言习惯,对全书的文字作了较多的润色,使其表述更加准确,更加简洁凝练。

第三,改正了第三版中的个别印刷错误,修正了函数图像中的个别问题和个别习题的答案。

第四,根据国家相关标准,规范了有关术语和数学式子的表达;并对全书使用的外国人名,按照现在的标准或通用译法重新翻译人名,以求统一标准。

第五,对全书的版面和开本重新进行了调整,使其更富有时代的色彩。

我们殷切期望使用本书的读者,懂得只有通过个人的独立思考,加上勤学苦练才能取得成功,“只看不练假把式”,数学的学习是在个人的独立解题中逐步弄懂有关的概念、公式和理论的,我们编写本书,就是希望能

对数学分析课程的学习起到一个抛砖引玉的作用。读者使用本书最好是不要先看题解,更不要查抄解答和答案,而是自己先对照教材中的有关概念、公式和理论独立进行思考,必要时可参照书中的提示、解题思路或证明思路独立完成解题,然后再查看书中是怎样解答的,比较自己的解答和书中解答的异同,从中找出差距,找出自己的问题所在,甚至找出书中解答的错误和不足之处,进而找到更为简洁的解答。只有这样才能提高自己的思维能力和创造才能,任何削弱独立思考的做法都是违背我们出版本书的初衷的。

山东科学技术出版社颜秀锦、宋德万、胡新蓉等老一代资深编辑为本书前三版的出版和发行付出了艰辛努力,责任编辑宋涛为本书第四版怎样提高质量倾注了不少心血,在此我们一并表示感谢。同时感谢山东大学、华东交通大学、山东师范大学等兄弟学校对本书出版的支持。感谢社会各界同仁对本书的支持。虽然历经 30 余年的反复修订,面对如此庞大的图书,限于本人水平,书中难免有错误和不当之处,敬请各位专家、同仁和广大读者批评指正,不胜感激,并在新版中改正。

费定晖

2012 年 5 月于南昌华东交通大学

出版说明 CHUBANSHUOMING

吉米多维奇(Б. П. ДЕМИДОВИЧ)著《数学分析习题集》一书的中译本,自 50 年代初在我国翻译出版以来,引起了全国各大专院校广大师生的巨大反响。凡从事数学分析教学的师生,常以试解该习题集中的习题,作为检验掌握数学分析基本知识和基本技能的一项重要手段。二十多年来,对我国数学分析的教学工作是甚为有益的。

该书四千多道习题,数量多,内容丰富,由浅入深,部分题目难度大。涉及的内容有函数与极限,一元函数微分学,不定积分,定积分,级数,多元函数微分学,带参数的积分以及多重积分与曲线积分、曲面积分等等,概括了数学分析的全部主题。当前,我国广大读者,特别是肯于刻苦自学的广大数学爱好者,在为四个现代化而勤奋学习的热潮中,迫切需要对一些疑难习题有一个较明确的回答。有鉴于此,我们特约作者,将全书 4462 题的所有解答编辑成书,共分六册出版。本书可以作为高等院校的教学参考用书,同时也可作为广大读者在自学微积分过程中的参考用书。

众所周知,原习题集,题多难度大,其中不少习题如果认真习作的话,既可以深刻地巩固我们所学到的基本概念,又可以有效地提高我们的运算能力,特别是有些难题还可以迫使我们学会综合分析的思维方法。正由于这样,我们殷切期望初学数学分析的青年读者,一定要刻苦钻研,千万不要轻易查抄本书的解答,因为任何削弱独立思考的作法,都是违背我们出版此书的本意。何况所作解答并非一定标准,仅作参考而已。如有某些误解、差错也在所难免,一经发觉,恳请指正,不胜感谢。

本书蒙潘承洞教授对部分难题进行了审校。特请郭大钧教授、邵品琮教授对全书作了重要仔细的审校。其中相当数量的难度大的题,都是郭大钧、邵品琮亲自作的解答。

参加本册审校工作的还有周家云同志。

参加编演工作的还有黄春朝同志。

本书在编审过程中,还得到山东大学、山东工学院、山东师范学院和曲阜师范学院的领导和同志们的大力支持,特在此一并致谢。

目录 MULU

第五章 级数.....	1
§ 1. 数项级数. 同号级数收敛性的判别法	1
§ 2. 变号级数收敛性的判别法	34
§ 3. 级数的运算	54
§ 4. 函数项级数	59
§ 5. 幂级数	96
§ 6. 傅里叶级数	141
§ 7. 级数求和法	163
§ 8. 利用级数求定积分	184
§ 9. 无穷乘积	189
§ 10. 斯特林公式	211
§ 11. 用多项式逼近连续函数	214

第五章 级数

§ 1. 数项级数. 同号级数收敛性的判别法

1° 一般概念 对于数项级数

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad (1)$$

若存在极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \quad (\text{级数的和}),$$

式中 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, 则称级数(1)为收敛的. 反之, 则称级数(1)为发散的.

2° 柯西准则 级数(1)收敛的充分必要条件为: 对于任何的 $\epsilon > 0$, 都存在数 $N = N(\epsilon)$, 使得当 $n > N$ 和 $p > 0$ 时, 不等式

$$|S_{n+p} - S_n| = \left| \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i \right| < \epsilon$$

成立. 特别是, 若级数收敛, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

3° 比较判别法 I 设除级数(1)外, 还有级数

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots, \quad (2)$$

若当 $n \geq n_0$ 时, 不等式

$$0 \leq a_n \leq b_n$$

成立, 则: 1) 从级数(2)收敛可推得级数(1)收敛; 2) 从级数(1)发散可推得级数(2)发散.

特别是, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 若 $a_n \sim b_n$, 则正项级数(1)和(2)同时收敛或同时发散.

4° 比较判别法 II 若

$$a_n = O\left(\frac{1}{n^p}\right),$$

则(i) 当 $p > 1$ 时级数(1)收敛, (ii) 当 $p \leq 1$ 时级数(1)发散.

5° 达朗贝尔判别法 若 $a_n > 0$ ($n=1, 2, \cdots$) 及

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q,$$

则(i) 当 $q < 1$ 时级数(1)收敛, (ii) 当 $q > 1$ 时级数(1)发散.

6° 柯西判别法 若 $a_n \geq 0$ ($n=1, 2, \cdots$) 及

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q,$$

则(i) 当 $q < 1$ 时级数(1)收敛, (ii) 当 $q > 1$ 时级数(1)发散.

7° 拉比判别法 若 $a_n > 0$ ($n=1, 2, \cdots$) 及

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = p,$$

则(i) 当 $p > 1$ 时级数(1)收敛; (ii) 当 $p < 1$ 时级数(1)发散.

8° 高斯判别法 若 $a_n > 0$ ($n=1, 2, \cdots$) 及

* 记号 O^* 的意义参阅第一章 § 6, 1°.

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\epsilon}},$$

式中 $|\theta_n| < C$ 而 $\epsilon > 0$, 则 (i) 当 $\lambda > 1$ 时级数(1)收敛; (ii) 当 $\lambda < 1$ 时级数(1)发散; (iii) 当 $\lambda = 1$ 时, 若 $\mu > 1$ 则级数(1)收敛; 若 $\mu \leq 1$ 则级数(1)发散.

9° 柯西积分判别法 若 $f(x)$ ($x \geq 1$) 是非负不增函数, 则

$$\text{级数 } \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \quad \text{与} \quad \text{积分 } \int_1^{+\infty} f(x) dx$$

同时收敛或同时发散.

直接证明下列级数的收敛性并求它们的和:

【2546】 $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} + \dots$

解 由于

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} = \frac{1 - \frac{(-1)^n}{2^n}}{1 + \frac{1}{2}},$$

故得 $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$, 即所给级数收敛, 且其和为 $\frac{2}{3}$. (以下有关各题省略这两句话)

【2547】 $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) + \dots$

解 由于

$$\begin{aligned} S_n &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \frac{1}{3^n}}{1 - \frac{1}{3}}, \end{aligned}$$

故得 $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$.

【2548】 $\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2n-1}{2^n} + \dots$

提示 注意 $\frac{1}{2} S_n = S_n - \frac{1}{2} S_n = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{2n-1}{2^n} \right)$, 并利用 58 题的结果.

解 由于

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2n-1}{2^n},$$

从而有

$$\frac{1}{2} S_n = \frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{2n-3}{2^n} + \frac{2n-1}{2^{n+1}},$$

并且

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} S_n &= S_n - \frac{1}{2} S_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \dots + \frac{2}{2^n} - \frac{2n-1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \left(1 + 1 + \dots + \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{2n-1}{2^n} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{2n-1}{2^n} \right), \end{aligned}$$

故得 $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3$.

【2549】 $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$.

提示 注意 $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, 即知 $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$.

解 由于

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ = 1 - \frac{1}{n+1},$$

故得 $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$.

【2550】 $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \cdots$.

提示 注意 $\frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right)$, 即知 $S_n = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3n+1}\right)$.

解 由于

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k+1}\right) \\ = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3n+1}\right),$$

故得 $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{3}$.

【2551】 (1) $q \sin \alpha + q^2 \sin 2\alpha + \cdots + q^n \sin n\alpha + \cdots$ ($|q| < 1$);

(2) $q \cos \alpha + q^2 \cos 2\alpha + \cdots + q^n \cos n\alpha + \cdots$ ($|q| < 1$).

提示 令 $z = q(\cos \alpha + i \sin \alpha) = qe^{i\alpha}$, 其中 $i^2 = -1$. 并注意 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ 及利用棣莫弗公式.

解 令 $z = q(\cos \alpha + i \sin \alpha) = qe^{i\alpha}$, 其中 $i^2 = -1$. 于是, 得 $|z| = |q| < 1$, 并且有

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \cos n\alpha + i \sum_{n=0}^{\infty} q^n \sin n\alpha \quad (1')$$

及

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-q\cos\alpha - i q\sin\alpha} = \frac{(1-q\cos\alpha) + i q\sin\alpha}{1-2q\cos\alpha + q^2}. \quad (2')$$

比较(1')、(2')两式的实部及虚部, 即得

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} q^n \sin n\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \sin n\alpha = \frac{q\sin\alpha}{1-2q\cos\alpha + q^2};$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} q^n \cos n\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \cos n\alpha - 1 = \frac{1-q\cos\alpha}{1-2q\cos\alpha + q^2} - 1 = \frac{q\cos\alpha - q^2}{1-2q\cos\alpha + q^2}.$$

【2552】 $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}).$

提示 $S_n = 1 - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}.$

解 由于

$$S_n = (\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 1) + (\sqrt{4} - 2\sqrt{3} + \sqrt{2}) + (\sqrt{5} - 2\sqrt{4} + \sqrt{3}) + (\sqrt{6} - 2\sqrt{5} + \sqrt{4}) \\ + \cdots + (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) \\ = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} = 1 - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}},$$

故得 $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1 - \sqrt{2}$.

【2553】 研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ 的收敛性.

提示 记 $x = k\pi$. 若 k 为非整数, 可用反证法证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin nx \neq 0$. 若 k 为整数, 则级数收敛.

解 记 $x = k\pi$. 若 k 为整数, 则由 $\sin nx = 0$ 知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ 是收敛的, 且其和为零. 若 k 为非整数, 我

们以下将证 $\sin nx$ 并不趋于零, 于是, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ 发散. 可采用反证法. 假设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin nx = 0,$$

则当 $n \rightarrow \infty$ 时也有 $\sin(n+1)x \rightarrow 0$. 但是,

$$\sin(n+1)x = \sin nx \cos x + \cos nx \sin x,$$

由 $\sin(n+1)x \rightarrow 0$ 及 $\sin nx \rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时) 知 $\cos nx \sin x \rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时), 而 $\sin x = \sin k\pi \neq 0$, 故必有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos nx = 0.$$

但

$$1 = \sin^2 nx + \cos^2 nx.$$

令 $n \rightarrow \infty$, 两端取极限, 即得左端为 1 而右端为 0, 这就产生了 1 与 0 相等的谬论. 这个矛盾证明了此假设不

真, 也即 $\sin nx \not\rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时), 从而, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ 的发散性获证.

【2554】 证明: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则把该级数的各项在不变更其先后次序的情况下分别组合起来, 所得级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \quad (\text{其中 } A_n = \sum_{k=p_{n-1}}^{p_n-1} a_k, \quad (p_0 = 1, p_1 < p_2 < \dots))$$

也收敛且有相同的和. 反之不真. 举出例子.

证明思路 注意到级数 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 的前 n 项之和为 $l_n = \sum_{k=1}^n A_k = \sum_{k=1}^{p_n-1} a_k$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的前 $p_{n+1}-1$ 项之和 $S_{p_{n+1}-1} = \sum_{k=1}^{p_{n+1}-1} a_k$, 故 $l_n = S_{p_{n+1}-1}$. 由级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的收敛性, 即知 $\lim_{n \rightarrow \infty} l_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{p_{n+1}-1} = S$, 其中 S 为定值. 于是, 命题获证.

反之不真. 例如, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ 发散, 但按下述方法组成的级数 $(1-1) + (1-1) + \dots + (1-1) + \dots$ 却收敛.

证 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 的部分和数列为 $l_1, l_2, \dots, l_n, \dots$, 则 $l_n = \sum_{k=1}^n A_k = \sum_{k=1}^{p_n-1} a_k$.

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 故其部分和数列 $\{S_n\}$ 趋于定值 S , 因此,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} l_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{p_{n+1}-1} = S,$$

即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 是收敛的, 且与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 有相同的和. 反之不真. 例如, 级数

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{n-1} + \dots$$

是发散的, 但按下述方法组成的级数

$$(1-1) + (1-1) + \dots + (1-1) + \dots$$

却是收敛的.

【2555】 证明:若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的各项是正的,且把这级数的各项分别组合而得到的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 收敛,

则原来的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛.

证明思路 记原级数的前 n 项之和为 S_n ,注意到 $a_k > 0$ ($k=1,2,\dots$),则显然可知:

(1) $S_n < S_{n+1}$ ($n=1,2,\dots$);

(2) 存在正整数 n_0 ,使有 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k < \sum_{l=1}^{n_0} A_l < S$,其中 S 为收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 之和.于是,命题易获证.

证 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 收敛,记其和为 S .考虑原级数的部分和 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$,并注意到 $a_k > 0$ ($k=1,2,\dots$),故存在正整数 n_0 ,使

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k < \sum_{l=1}^{n_0} A_l < S.$$

显然 $S_n < S_{n+1}$ 对一切 n 成立.于是, $\{S_n\}$ 单调上升且有界.因此,极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 存在有限,即原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

研究下列级数的收敛性:

【2556】 $1-1+1-1+1-1+\dots$.

提示 注意 $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n-1}$ 不存在.

解 由于通项 $a_n = (-1)^{n-1}$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限不存在,更不可能趋于零,故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ 发散.

【2557】 $0.001 + \sqrt{0.001} + \sqrt[3]{0.001} + \dots$.

提示 利用 63 题的结果.

解 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{0.001} = 1 \neq 0$,故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{0.001}$ 发散.

【2558】 $\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$.

提示 利用 72 题的结果.

解 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) = e - 1,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ 收敛,且其和为 $e - 1$.

【2559】 $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \dots$.

提示 注意 $\frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n} > 0$.

解 由于 $\frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n} > 0$,且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ 发散,故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ 也发散.

【2560】 $\frac{1}{1001} + \frac{1}{2001} + \frac{1}{3001} + \dots + \frac{1}{1000n+1} + \dots$.

提示 注意 $\frac{1}{1000n+1} \geq \frac{1}{1001n} > 0$.

解 由于 $\frac{1}{1000n+1} \geq \frac{1}{1001n}$,且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1001n}$ 发散,故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1000n+1}$ 也发散.

【2561】 $1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \dots + \frac{n}{2n-1} + \dots$.

提示 注意 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2}$.

解 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} \neq 0$, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1}$ 发散.

【2562】 $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \cdots$.

提示 注意 $0 < \frac{1}{(2n-1)^2} \leq \frac{1}{n^2}$.

解 由于 $0 < \frac{1}{(2n-1)^2} \leq \frac{1}{n^2}$, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ 也收敛.

【2563】 $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{n\sqrt{n+1}} + \cdots$.

提示 注意 $0 < \frac{1}{n\sqrt{n+1}} < \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$.

解 由于 $0 < \frac{1}{n\sqrt{n+1}} < \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$ 也收敛.

【2564】 $\frac{1}{\sqrt{1 \cdot 3}} + \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 5}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}} + \cdots$.

提示 注意 $\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}} > \frac{1}{2n} > 0$.

解 由于 $\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}} > \frac{1}{2n} > 0$, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ 发散, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}$ 也发散.

【2565】 证明: 由等差级数各项的倒数组成的级数是发散的.

证明思路 设等差级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} [a + (n-1)d]$, 其中 d 为公差. 可以从下面三种情况来证明命题.

(1) $d > 0$, 总存在正整数 n_0 , 使有 $a < (n_0 - 1)d$, 则当 $n \geq n_0$ 时, 有 $a + (n-1)d < 2(n-1)d$. 于是, 只需注意到

$$\frac{1}{a + (n-1)d} > \frac{1}{2(n-1)d} > \frac{1}{2nd} > 0,$$

即知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a + (n-1)d}$ 发散.

(2) $d = 0$, 则 $a \neq 0$, 该级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a}$ 显然发散.

(3) $d < 0$. 将此级数的各项乘以 -1 , 即化为 $d > 0$ 的情形.

证 设等差级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} [a + (n-1)d]$, 其中 d 为公差.

当 $d > 0$ 时, 总存在正整数 n_0 , 使 $a < (n_0 - 1)d$, 则当 $n \geq n_0$ 时, 有 $a + (n-1)d < 2(n-1)d$. 于是,

$$\frac{1}{a + (n-1)d} > \frac{1}{2(n-1)d} > \frac{1}{2nd} > 0,$$

注意到级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{2nd}$ 发散, 因而, 级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{a + (n-1)d}$ 发散, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a + (n-1)d}$ 也发散.

当 $d = 0$ 时, a 不可能为零, 此时级数 $\frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \cdots + \frac{1}{a} + \cdots$ 显然发散.

当 $d < 0$ 时, 将此级数的各项乘以 -1 即化为 $d > 0$ 的情形, 于是, 这级数也发散.

综上所述, 不论 d 为何值, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a + (n-1)d}$ 均发散.

【2566】 证明: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (A) 及 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (B) 皆收敛且 $a_n \leq c_n \leq b_n$ ($n = 1, 2, \dots$), 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ (C)

也收敛,若级数(A)与(B)皆发散,问级数(C)的收敛性若何?

提示 (1)先证级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (c_n - a_n)$ 收敛.(2)可能收敛,也可能发散.例如, $a_n = -1, b_n = 1, c_n = 0, c_n = \frac{1}{2}$ ($n=1, 2, \dots$).

证 当级数(A)及(B)收敛时,由于 $a_n \leq c_n \leq b_n$,故 $0 \leq c_n - a_n \leq b_n - a_n$. 因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n)$ 收敛,故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (c_n - a_n)$ 也收敛,再由级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} (c_n - a_n)$ 的收敛性即知,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} [a_n + (c_n - a_n)] = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 也收敛.

若级数(A)与(B)皆发散,则级数(C)可能收敛,也可能发散.例如,级数

$$-1-1-1-\dots \quad \text{及} \quad 1+1+1+\dots$$

皆发散,而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 当 $c_n = 0$ ($-1 < c_n < 1$) 时收敛;当 $c_n = \frac{1}{2}$ ($-1 < c_n < 1$) 也发散.

【2567】 设已知二发散级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 的各项不为负数,问下列级数的收敛性若何:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n)$ 及 (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \max(a_n, b_n)$?

提示 (1)可能收敛,也可能发散.例如,

$$a_n = \frac{1+(-1)^n}{2}, \quad b_n = \frac{1-(-1)^n}{2} \quad \text{及} \quad a_n = \frac{1}{n}, \quad b_n = \frac{1}{2n}.$$

(2)注意 $\max(a_n, b_n) \geq a_n \geq 0$.

解 (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n)$ 可能收敛,也可能发散.例如,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{2}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{2}$ 皆发散,但是 $\sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n) = 0+0+\dots+0+\dots$ 却收敛.又如,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ 皆发散,但是 $\sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ 也发散.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \max(a_n, b_n)$ 一定发散.事实上, $\max(a_n, b_n) \geq a_n \geq 0$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散,故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \max(a_n, b_n)$ 也发散.

【2568】 证明:若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n \geq 0$) 收敛,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 也收敛.逆命题不成立,举出例子.

证明思路 注意到 $a_n \rightarrow 0$, 故存在 n_0 , 使当 $n \geq n_0$ 时,有 $0 \leq a_n < 1$. 从而也有 $0 \leq a_n^2 < a_n$.

反之不真.例如, $a_n = \frac{1}{n}$.

证 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,故 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. 于是,总存在 n_0 . 使当 $n \geq n_0$ 时,有 $0 \leq a_n < 1$. 从而,当 $n \geq n_0$ 时,有 $0 \leq a_n^2 < a_n$. 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,当然级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ 收敛,故级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n^2$ 收敛,从而,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 也收敛.

反之不真.例如, $a_n = \frac{1}{n}$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛,而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 却发散.

【2569】 证明:若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 收敛,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$ 也收敛.

证明思路 首先,只要注意 $0 \leq 2|a_n b_n| \leq a_n^2 + b_n^2$, 第一个结果即获证.其次,由 $(a_n + b_n)^2 = a_n^2 + 2a_n b_n + b_n^2$,

易证第二个结果.对于最后一个结果,只要令 $b_n = \frac{1}{n}$, 利用第一个结果即获证.

证 由于 $0 \leq 2|a_n b_n| \leq a_n^2 + b_n^2$, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$ 收敛.

其次, 由于 $(a_n + b_n)^2 = a_n^2 + b_n^2 + 2a_n b_n$, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 皆收敛, 故知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$ 也收敛.

最后, 设 $b_n = \frac{1}{n}$, 利用第一个结果即证得级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$ 收敛.

【2570】 证明: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = a \neq 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

证明思路 不妨设 $a > 0$. 由题设 $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = a$ 可知, 对任给的 $0 < \epsilon < a$, 存在正整数 n_0 , 使当 $n \geq n_0$ 时, 有

$$n a_n > a - \epsilon \quad \text{或} \quad a_n > (a - \epsilon) \frac{1}{n},$$

命题易获证.

对于 $a < 0$, 只须将级数各项乘以 -1 , 即化为 $a > 0$ 的情形.

证 $n a_n = \frac{a_n}{\frac{1}{n}}$. 不妨设 $a > 0$. 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = a$, 故对于任给的 $0 < \epsilon < a$, 总存在正整数 n_0 , 使当 $n \geq n_0$ 时, 有

$$\frac{a_n}{\frac{1}{n}} > a - \epsilon > 0 \quad \text{或} \quad a_n > (a - \epsilon) \frac{1}{n} > 0.$$

如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ 也收敛, 从而会得出级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n}$ 收敛的错误结论. 因此, 原级数

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

若 $a < 0$, 只要将级数各项乘以 -1 , 即化为 $a > 0$ 的情形.

【2571】 证明: 若各项为正且其值单调递减的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$.

证 对于任何的 m 与 $n > m$, 我们有

$$(n-m)a_n < a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n < a_m,$$

其中 a_m 为该收敛级数的余式, 由此得 $n a_n < \frac{n}{n-m} a_m$.

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 故对于任给的 $\epsilon > 0$, 我们可取定某 m_0 , 使 $a_{m_0} < \epsilon$.

其次, 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n-m_0} = 1$, 故存在正整数 n_0 ($n_0 > m_0$), 使当 $n \geq n_0$ 时, 有 $\frac{n}{n-m_0} < 2$.

于是, 当 $n \geq n_0$ 时, 有 $0 < n a_n < 2\epsilon$, 因此, $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$. 本题得证.

【2572】 若当 $p=1, 2, 3, \cdots$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}) = 0$. 问级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是否收敛?

提示 不一定收敛. 例如, $a_n = \frac{1}{n}$.

解 若当 $p=1, 2, 3, \cdots$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}) = 0, \quad (1)$$

并不一定有级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 例如, 取 $a_n = \frac{1}{n}$, 显然级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 但却有

$$0 < a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+p} < \frac{p}{n+1},$$

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p}{n+1} = 0$, 故对于一切 p , (1) 式均成立.

这个事实与柯西准则并不矛盾,因为在柯西准则中,对于任给的 $\epsilon > 0$, 存在数 $N = N(\epsilon)$, 使当 $n > N$ 和 $p > 0$ 时, 不等式

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \epsilon$$

成立, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 其中的 N 只依赖于 ϵ , 而与 p 无关. 本题的叙述中, 条件并没有排除 N 要与 p 有关.

利用柯西准则, 证明下列正项级数的收敛性:

【2573】 $a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots \quad (|a_n| < 10).$

证 $|S_{n+p} - S_n| = \left| \frac{a_n}{10^n} + \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} + \cdots + \frac{a_{n+p-1}}{10^{n+p-1}} \right| \leq \frac{|a_n|}{10^n} + \frac{|a_{n+1}|}{10^{n+1}} + \cdots + \frac{|a_{n+p-1}|}{10^{n+p-1}}$
 $< \frac{1}{10^{n-1}} \left(1 + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{10^{p-1}} \right) < \frac{1}{10^{n-1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{9 \cdot 10^{n-2}}.$

任给 $\epsilon > 0$, 要 $|S_{n+p} - S_n| < \epsilon$, 只要 $\frac{1}{10^{n-2}} < 9\epsilon$, 即只要 $n > 2 + \lg \frac{1}{9\epsilon}$. 取 $N = 2 + [\lg \frac{1}{9\epsilon}]$, 则当 $n > N$ 时, 不等式

$|S_{n+p} - S_n| < \epsilon$ 对一切正整数 p 皆成立, 因此, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ 收敛.

【2574】 $\frac{\sin x}{2} + \frac{\sin 2x}{2^2} + \cdots + \frac{\sin nx}{2^n} + \cdots.$

提示 注意级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 收敛, 以及有 $|S_{n+p} - S_n| \leq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+p}}.$

证 $|S_{n+p} - S_n| = \left| \frac{\sin(n+1)x}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{\sin(n+p)x}{2^{n+p}} \right| \leq \frac{1}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+p}}. \quad (1)$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 收敛, 故按柯西准则, 对于任给的 $\epsilon > 0$, 总存在正整数 N , 使当 $n > N$ 时, 对任意正整数 p , 有

$$\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+p}} < \epsilon. \quad (2)$$

由(1)式及(2)式得知, 当 $n > N$ 时, 不等式 $|S_{n+p} - S_n| < \epsilon$ 对一切正整数 p 皆成立.

因此, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}$ 收敛.

【2575】 $\frac{\cos x - \cos 2x}{1} + \frac{\cos 2x - \cos 3x}{2} + \cdots + \frac{\cos nx - \cos(n+1)x}{n} + \cdots.$

解 $S_{n+p} - S_n = \sum_{i=n+1}^{n+p} \frac{\cos ix - \cos(i+1)x}{i}$
 $= \frac{\cos(n+1)x}{n+1} - \sum_{i=n+1}^{n+p-1} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right) \cos(i+1)x - \frac{\cos(n+p+1)x}{n+p},$

故

$$|S_{n+p} - S_n| \leq \frac{1}{n+1} + \sum_{i=n+1}^{n+p-1} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right) + \frac{1}{n+p} = \frac{2}{n+1} < \frac{2}{n}.$$

对于任给的 $\epsilon > 0$, 取正整数 $N = [\frac{2}{\epsilon}]$, 则当 $n > N$ 时, 对于一切正整数 p , 有

$$|S_{n+p} - S_n| < \frac{2}{n} < \epsilon.$$

因此, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx - \cos(n+1)x}{n}$ 收敛.

利用柯西准则, 证明下列级数的发散性:

0132371

【2576】 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$.

证明思路 不论 n 多大, 若令 $p=n$, 则有

$$|S_{n+p} - S_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ 项}} = \frac{1}{2}.$$

解 取 $0 < \epsilon_0 < \frac{1}{2}$, 不论 n 多大, 若令 $p=n$, 则有

$$|S_{n+p} - S_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \underbrace{\frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ 项}} = \frac{1}{2} > \epsilon_0.$$

因此, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

【2577】 $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$.

证明思路 不论 n 多大, 若令 $p=3n$, 则有

$$\begin{aligned} |S_{3n+p} - S_{3n}| &= \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} - \frac{1}{3n+3} + \cdots + \frac{1}{6n-2} + \frac{1}{6n-1} - \frac{1}{6n} \\ &> \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{3n+3} - \frac{1}{3n+3} + \cdots + \frac{1}{6n} + \frac{1}{6n} - \frac{1}{6n} \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) > \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

解 取 $0 < \epsilon_0 < \frac{1}{6}$, 不论 n 多大, 若令 $p=3n$, 则有

$$\begin{aligned} |S_{3n+p} - S_{3n}| &= \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} - \frac{1}{3n+3} + \cdots + \frac{1}{6n-2} + \frac{1}{6n-1} - \frac{1}{6n} \\ &> \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{3n+3} - \frac{1}{3n+3} + \cdots + \frac{1}{6n} + \frac{1}{6n} - \frac{1}{6n} \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) > \frac{1}{3} \underbrace{\left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} \right)}_{n \text{ 项}} = \frac{1}{6} > \epsilon_0. \end{aligned}$$

因此, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} - \frac{1}{3n+3} \right)$ 发散.

运用达朗贝尔判别法、柯西判别法或比较判别法, 研究下列级数的收敛性:

【2578】 $\frac{1000}{1!} + \frac{1000^2}{2!} + \frac{1000^3}{3!} + \cdots + \frac{1000^n}{n!} + \cdots$.

解 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1000^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{1000^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1000}{n+1} = 0 < 1,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{n!}$ 收敛.

【2579】 $\frac{(1!)^2}{2!} + \frac{(2!)^2}{4!} + \cdots + \frac{(n!)^2}{(2n)!} + \cdots$.

解 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{[(n+1)!]^2}{(2n+2)!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2(2n+1)} = \frac{1}{4} < 1,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ 收敛.

$$\text{【2580】 } \frac{1!}{1^1} + \frac{2!}{2^2} + \frac{3!}{3^3} + \dots + \frac{n!}{n^n} + \dots$$

提示 利用达朗贝尔判别法及 69 题的结果.

解 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]^{-1} = e^{-1} < 1,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ 收敛.

$$\text{【2581】 (1) } \frac{2 \cdot 1!}{1^1} + \frac{2^2 \cdot 2!}{2^2} + \frac{2^3 \cdot 3!}{3^3} + \dots + \frac{2^n n!}{n^n} + \dots;$$

$$(2) \frac{3 \cdot 1!}{1^1} + \frac{3^2 \cdot 2!}{2^2} + \frac{3^3 \cdot 3!}{3^3} + \dots + \frac{3^n n!}{n^n} + \dots.$$

解 (1) 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n n!}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-n} = \frac{2}{e} < 1,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$ 收敛.

(2) 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{3^n n!}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-n} = \frac{3}{e} > 1,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$ 发散.

$$\text{【2582】 } \frac{(1!)^2}{2} + \frac{(2!)^2}{2^4} + \frac{(3!)^2}{2^9} + \dots + \frac{(n!)^2}{2^{n^2}} + \dots$$

解 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{[(n+1)!]^2}{2^{(n+1)^2}}}{\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}} = 0 < 1,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$ 收敛.

$$\text{【2583】 } \frac{1000}{1} + \frac{1000 \cdot 1001}{1 \cdot 3} + \frac{1000 \cdot 1001 \cdot 1002}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \dots$$

解 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1000+n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1.$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000 \cdot 1001 \cdots (1000+n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}$ 收敛.

$$\text{【2584】 } \frac{4}{2} + \frac{4 \cdot 7}{2 \cdot 6} + \frac{4 \cdot 7 \cdot 10}{2 \cdot 6 \cdot 10} + \dots$$

解 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+4}{4n+2} = \frac{3}{4} < 1,$$

故级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4 \cdot 7 \cdot 10 \cdots (3n+4)}{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdots (4n+2)}$ 收敛.

【2585】 $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{2}-\sqrt[3]{2})(\sqrt{2}-\sqrt[5]{2})\cdots(\sqrt{2}-\sqrt[2n+1]{2}).$

提示 同 2580 题并利用 63 题的结果.

解 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2} - \sqrt[2n+3]{2}) = \sqrt{2} - 1 < 1,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{2}-\sqrt[3]{2})(\sqrt{2}-\sqrt[5]{2})\cdots(\sqrt{2}-\sqrt[2n+1]{2})$ 收敛.

【2586】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}.$

提示 利用柯西判别法及 65 题的结果.

解 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n^2} \sqrt[n]{n}}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} < 1,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$ 收敛.

【2587】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}.$

提示 注意通项 $a_n \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \sqrt[n]{n} \rightarrow e^{-1}$, 并利用比较判别法.

解 $\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n} \geq \frac{n^n \cdot n^{\frac{1}{n}}}{(n+1)^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \sqrt[n]{n} > 0$, 对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \sqrt[n]{n}$. 由于其通项趋于 $\frac{1}{e} \neq 0$,

故它是发散的. 因此, 原级数也是发散的.

注意 若用达朗贝尔判别法, 则有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, 无明确结论, 此时还应改用高斯判别法.

【2588】 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}.$

提示 注意当 $n \geq 2$ 时, $\frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}} > \frac{1}{\sqrt[n]{n}} > 0$. 并利用 65 题的结果及比较判别法.

解 当 $n \geq 2$ 时, $\ln n < n$. 于是,

$$\frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}} > \frac{1}{\sqrt[n]{n}} > 0.$$

对于级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$, 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 \neq 0$, 故它是发散的. 因此, 原级数也发散.

注意 若用达朗贝尔判别法, 将遇到与 2587 题类似的情况.

【2589】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n+1}{2}}}.$

提示 注意 $0 < \frac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n+1}{2}}} < \frac{n^{n-1}}{(n^2)^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{1}{n^2}$, 并利用比较判别法.

解 由于 $0 < \frac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n+1}{2}}} < \frac{n^{n-1}}{(n^2)^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{1}{n^2}$, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故原级数也收敛.

注意 若用达朗贝尔判别法,则有

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}} \cdot \frac{(2n^2+n+1)^{\frac{n+1}{2}}}{(2n^2+5n+4)^{\frac{n+2}{2}}} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{n}{(2n^2+5n+4)^{\frac{1}{2}}} \cdot \left(\frac{2n^2+n+1}{2n^2+5n+4}\right)^{\frac{n+1}{2}} \right] \\ &= e \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{e} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1,\end{aligned}$$

也可证得原级数收敛.

【2590】 $\sqrt{2} + \sqrt{2-\sqrt{2}} + \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} + \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} + \dots$

提示 注意 $\sqrt{2} = 2\cos \frac{\pi}{4} = 2\sin \frac{\pi}{4}$, 利用数学归纳法, 可证通项 $a_n = 2\sin \frac{\pi}{2^{n+1}}$, 并利用达朗贝尔判别法.

解 解法 1: $\sqrt{2} = 2\cos \frac{\pi}{4} = 2\sin \frac{\pi}{4}$,

$$\sqrt{2-\sqrt{2}} = \sqrt{2-2\cos \frac{\pi}{4}} = 2\sin \frac{\pi}{8},$$

$$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{2-\sqrt{2+2\cos \frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2-2\cos \frac{\pi}{8}} = 2\sin \frac{\pi}{16},$$

利用数学归纳法, 可证得通项为 $a_n = 2\sin \frac{\pi}{2^{n+1}}$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sin \frac{\pi}{2^{n+2}}}{2\sin \frac{\pi}{2^{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}} = \frac{1}{2} < 1,$$

故级数收敛.

解法 2: $\sqrt{2-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}} \sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}},$

$$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}.$$

利用数学归纳法, 可证得

$$\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ 重根号}}} = \frac{1}{\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2}}}}}_{n \text{ 重根号}}} \sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2}}}}_{(n-1) \text{ 重根号}}}.$$

由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2}}}}}_{n \text{ 重根号}}} = \frac{1}{2} < 1,$$

故级数收敛.

*) 利用 637 题的结果.

【2591】 证明: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ ($a_n > 0$), 则 $a_n = o(q_1^n)$, 其中 $q_1 > q$.

证 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, 故利用 141 题的结果, 即得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$.

令 $\epsilon = \frac{1}{2}(q_1 - q) > 0$, 则由上式知存在 n_0 , 使当 $n \geq n_0$ 时, 有 $|\sqrt[n]{a_n} - q| < \epsilon$, 从而有

$$\sqrt[n]{a_n} < q + \epsilon = \lambda q_1 \quad (n \geq n_0),$$

其中 $\lambda = \frac{q_1 + q}{2q_1} < 1$. 利用 $\lambda^n = o(1)$, 即证得 $a_n = \lambda^n q_1^n = o(q_1^n)$.

【2592】 证明: 若 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$ ($a_n > 0$), 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

逆命题不成立. 研究例子 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots$.

证 取 $0 < \varepsilon < 1 - q$, 由于 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$, 故存在 n_0 , 使当 $n \geq n_0$ 时, 有 $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q + \varepsilon = l < 1$. 从而,

$$0 < a_n \leq a_{n_0} l^{n-n_0} \quad (n \geq n_0).$$

由于级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty} l^{n-n_0}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ 收敛, 从而, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

反之不真, 例如, 级数 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots$ 显然是收敛的, 但是,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^{m+1}, & n = 2m+1, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^m, & n = 2m, \end{cases}$$

故有 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty$.

【2593】 证明: 若对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n > 0$), 存在极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \quad (1)$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q \quad (2)$$

也存在.

逆命题不成立: 若极限(2)存在, 则极限(1)可以不存在. 研究例子 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}$.

证 利用 141 题的结论, 本题的前半部分即得证.

反之不真. 例如, 对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}$ 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{3+(-1)^n}}{2 \cdot \sqrt[n]{2}} = \frac{1}{2}.$$

但是,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3+(-1)^{n+1}}{2[3+(-1)^n]} = \begin{cases} \frac{1}{4}, & n \text{ 为偶数;} \\ 1, & n \text{ 为奇数,} \end{cases}$$

故极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ 不存在.

【2594】 证明: 若 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$ ($a_n \geq 0$), 则 (1) 当 $q < 1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛; (2) 当 $q > 1$ 时级数发散 (柯西判别法的推广).

证 (1) 取 $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}(1-q)$. 由于 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$, 故存在 n_0 , 使当 $n \geq n_0$ 时, 有 $0 < \sqrt[n]{a_n} < q + \varepsilon$. 从而,

$$0 < \sqrt[n]{a_n} < \frac{q+1}{2} \quad (n \geq n_0) \quad \text{或} \quad 0 < a_n < \left(\frac{q+1}{2}\right)^n \quad (n \geq n_0).$$

由于 $0 \leq q < 1$, 故 $0 < \frac{q+1}{2} < 1$. 又因级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty} \left(\frac{q+1}{2}\right)^n$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ 收敛, 从而, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(2) 由于 $q > 1$, 故对于数列 $\{a_n\}$, 必有无穷多个 a_n , 能使不等式 $\sqrt[n]{a_n} > 1$ 成立, 从而, $a_n > 1$.

于是, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, a_n 不可能趋于零, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

研究下列级数的收敛性:

【2595】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n}$.

提示 利用柯西判别法及 63 题的结果.

解 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{2+(-1)^n}}{2} = \frac{1}{2} < 1$, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n}$ 收敛.

【2596】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos^2 \frac{n\pi}{3}}{2^n}$.

提示 注意 $0 < \frac{n \cos^2 \frac{n\pi}{3}}{2^n} < \frac{n}{2^n}$, 对级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ 利用柯西判别法及 65 题的结果.

解 $0 < \frac{n \cos^2 \frac{n\pi}{3}}{2^n} \leq \frac{n}{2^n}$. 对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$, 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2} = \frac{1}{2} < 1$, 故它是收敛的, 从而, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos^2 \frac{n\pi}{3}}{2^n}$ 也是收敛的.

【2597】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 [\sqrt{2} + (-1)^n]^n}{3^n}$.

提示 注意 $0 < \frac{n^3 [\sqrt{2} + (-1)^n]^n}{3^n} \leq \frac{n^3 (\sqrt{2} + 1)^n}{3^n}$, 对级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 (\sqrt{2} + 1)^n}{3^n}$ 利用达朗贝尔判别法.

解 $0 < \frac{n^3 [\sqrt{2} + (-1)^n]^n}{3^n} \leq \frac{n^3 (\sqrt{2} + 1)^n}{3^n}$.

对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 (\sqrt{2} + 1)^n}{3^n}$, 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2} + 1}{3} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 = \frac{\sqrt{2} + 1}{3} < 1$, 故它是收敛的,

从而, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 [\sqrt{2} + (-1)^n]^n}{3^n}$ 也是收敛的.

利用拉比判别法和高斯判别法, 研究下列级数的收敛性:

【2598】 $\left(\frac{1}{2}\right)^p + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^p + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^p + \dots$.

提示 注意 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \frac{p}{2}$.

解 $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\frac{2n+2}{2n+1} \right)^p$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2n+2}{2n+1} \right)^p - 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{p}{2n+1} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1}{\frac{1}{n}} = \frac{p}{2},$$

故当 $\frac{p}{2} > 1$ 即 $p > 2$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^p$ 收敛.

【2599】 $\frac{a}{b} + \frac{a(a+d)}{b(b+d)} + \frac{a(a+d)(a+2d)}{b(b+d)(b+2d)} + \dots \quad (a > 0, b > 0, d > 0).$

提示 注意 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \frac{b-a}{d}$.

解 $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{b+nd}{a+nd}$. 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{b+nd}{a+nd} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(b-a)n}{a+nd} = \frac{b-a}{d}$,

故当 $\frac{b-a}{d} > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+d) \cdots [a+(n-1)d]}{b(b+d) \cdots [b+(n-1)d]}$ 收敛.

【2600】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! e^n}{n^{n+p}}$.

提示 注意 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = p - \frac{1}{2}$.

解 $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\frac{n! e^n}{n^{n+p}}}{\frac{(n+1)! e^{n+1}}{(n+1)^{n+1+p}}} = \frac{1}{e} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n+p}$.

由于

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{e} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n+p} - 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{e} (1+x)^{\frac{1}{x}+p} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{e} e^{(\frac{1}{x}+p)\ln(1+x)} - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{e} e^{1+(p-\frac{1}{2})x+o(x)} - 1}{x} = p - \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

故当 $p - \frac{1}{2} > 1$ 即 $p > \frac{3}{2}$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! e^n}{n^{n+p}}$ 收敛.

【2601】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2}) \cdots (2+\sqrt{n})}$.

解 $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{2+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}}$. 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{2+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt{n+1}} = +\infty$,

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2}) \cdots (2+\sqrt{n})}$ 收敛.

【2602】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! n^{-p}}{q(q+1) \cdots (q+n)} \quad (p > 0, q > 0)$.

解 $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\frac{n+1}{n} \right)^p \left(1 + \frac{q}{n+1} \right)$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right)^p \left(1 + \frac{q}{n+1} \right) - 1 \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^p \left(1 + \frac{qx}{1+x} \right) - 1}{x} = p+q,$$

故当 $p+q > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! n^{-p}}{q(q+1) \cdots (q+n)}$ 收敛.

【2603】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p+1) \cdots (p+n-1)}{n!} \cdot \frac{1}{n^q} \quad (p > 0, q > 0)$.

提示 注意 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = q+1-p$.

解 $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\frac{n+1}{n} \right)^p \frac{1+n}{p+n}$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right)^p \frac{1+n}{p+n} - 1 \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{(1+x)^{p+1}}{1+px} - 1}{x} = q+1-p.$$

故当 $q+1-p > 1$ 即 $q > p$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p+1) \cdots (p+n-1)}{n!} \cdot \frac{1}{n^q}$ 收敛.

【2604】 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \right]^p \cdot \frac{1}{n^q}$.

解 $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^p \left(\frac{n+1}{n}\right)^q$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\left(\frac{2n+2}{2n+1} \right)^p \left(\frac{n+1}{n} \right)^q - 1 \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{2+2x}{2+x} \right)^p (1+x)^q - 1}{x} = q + \frac{p}{2},$$

故当 $q + \frac{p}{2} > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^p \cdot \frac{1}{n^q}$ 收敛.

【2605】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \left(1 - \frac{x \ln n}{n} \right)^n \quad (p > 0).$

解 令 $a_n = \frac{1}{n^p} \left(1 - \frac{x \ln n}{n} \right)^n$. 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x \ln n}{n} = 0$, 故当 n 充分大时, $a_n > 0$.

当 $x=0$ 时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, 它当 $p > 1$ 时收敛, 而当 $p \leq 1$ 时发散. 当 $x \neq 0$ 时, 我们有

$$\ln(a_n n^{p+x}) = x \ln n + n \ln \left(1 - \frac{x \ln n}{n} \right) = n u_n + n \ln(1 - u_n) = n u_n^2 \cdot \frac{u_n + \ln(1 - u_n)}{u_n^2},$$

其中 $u_n = \frac{x \ln n}{n}$, $u_n \neq 0$ ($n > 1$), $u_n \rightarrow 0$, $n u_n^2 \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). 由洛必达法则, 可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n + \ln(1 - u_n)}{u_n^2} = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{v + \ln(1 - v)}{v^2} = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1-v}}{2v} = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{1}{2(v-1)} = -\frac{1}{2},$$

故有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(a_n n^{p+x}) = 0 \quad \text{或} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^{p+x}}} = 1.$$

由此可知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p+x}}$ 有相同的敛散性, 故当 $p+x > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 而当 $p+x \leq 1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

综上所述, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 仅当 $x > 1-p$ 时收敛.

【2606】 证明: 若 $a_n > 0$ ($n=1, 2, \dots$), 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = p$, 则 $a_n = o\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right)$ ($\epsilon > 0$).

证 下面记 $a_n, a'_n, \beta_n, \beta'_n, \beta''_n, \epsilon_n$ 为无穷小量, 即

$$a_n = o(1), a'_n = o(1), \beta_n = o(1), \beta'_n = o(1), \beta''_n = o(1), \epsilon_n = o(1) \quad (n \rightarrow \infty).$$

由题设知, 当 $n \rightarrow \infty$ 时有 $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{p}{n} + \frac{a_n}{n}$. 取对数, 即得

$$\ln a_n - \ln a_{n+1} = \ln \left(1 + \frac{p}{n} + \frac{a_n}{n} \right) = \frac{p}{n} + \frac{a_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n} (p + a'_n).$$

令 $n=1, 2, \dots, N-1$ 并求和, 则得

$$\ln a_1 - \ln a_N = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} (p + a'_n).$$

由 143 题 (在其中令 $x_N = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{a'_n}{n}$, $y_N = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n}$) 知

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\left(\sum_{n=1}^{N-1} \frac{a'_n}{n} \right)}{\left(\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} \right)} = \lim_{N \rightarrow \infty} a'_N = 0.$$

又由 146 题知 $\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} = C + \ln(N-1) + \epsilon_N$, 其中 C 是欧拉常数, $\epsilon_N \rightarrow 0$. 于是, 令

$$\beta_N = \frac{\left(\sum_{n=1}^{N-1} \frac{\alpha'_n}{n}\right)}{\left(\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n}\right)},$$

有

$$\ln a_1 - \ln a_N = (p + \beta_N) \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} = (p + \beta_N) [C + \ln(N-1) + \epsilon_N] = (p + \beta_N) \ln(N-1) + k + \beta'_N,$$

其中 $k = Cp$ 为常数. 于是,

$$\ln a_N = -(p + \beta_N) \ln(N-1) + k' - \beta'_N,$$

其中 $k' = \ln a_1 - k$ 为常数, 从而,

$$a_N = e^{k' - \beta'_N} (N-1)^{-(p + \beta_N)} = e^{k' - \beta'_N} \left(\frac{N-1}{N}\right)^{-(p + \beta_N)} N^{\beta_N} N^{-p}.$$

其中 $\beta'_N = -\beta_N$. 由于 $\beta'_N = o(1)$, 故对于任给的 $\epsilon > 0$, 当 N 充分大时, 有 $|\beta'_N| < \frac{\epsilon}{2}$, 从而, $N^{\beta_N} < N^{\frac{\epsilon}{2}}$. 再注意到

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{N-1}{N}\right)^{-(p + \beta_N)} = 1,$$

即知: 当 N 充分大时, 有

$$0 < a_N \leq k'' N^{\frac{\epsilon}{2}} N^{-p} = O\left(\frac{1}{N^{p - \frac{\epsilon}{2}}}\right),$$

其中 k'' 是常数. 于是, 得 $a_N = o\left(\frac{1}{N^{p-\epsilon}}\right)$. 本题获证.

求出通项 a_n 的减小的阶, 从而研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的收敛性:

【2607】 $a_n = \frac{n^p + a_1 n^{p-1} + \dots + a_p}{n^q + b_1 n^{q-1} + \dots + b_q},$ 其中 $n^q + b_1 n^{q-1} + \dots + b_q > 0$.

提示 注意 $a_n = O^*\left(\frac{1}{n^{q-p}}\right)$.

解 由于 $a_n = O^*\left(\frac{1}{n^{q-p}}\right)$, 故当 $q-p > 1$ 即 $q > 1+p$ 时, 级数收敛.

【2608】 $a_n = \frac{1}{n^p} \sin \frac{\pi}{n}.$

提示 注意 $a_n = O^*\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right)$.

解 由于 $a_n \geq 0$, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^p} \sin \frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n^{p+1}}} = \pi \quad \text{或} \quad a_n = O^*\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right),$$

故仅当 $1+p > 1$ 即 $p > 0$ 时, 级数收敛.

【2609】 $a_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^p \ln \frac{n-1}{n+1} \quad (n > 1).$

解 由于 $a_n < 0$, 且

$$a_n = \left(\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\right)^p \ln\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) = O^*\left(\frac{1}{n^{\frac{p}{2}+1}}\right),$$

故仅当 $\frac{p}{2} + 1 > 1$ 即 $p > 0$ 时, 级数收敛.

【2610】 $a_n = \ln^p \left(\sec \frac{\pi}{n}\right).$

解 由于 $a_n > 0$ ($n > 2$ 时), 且

$$a_n = \frac{1}{2^p} \ln^p \left(1 + \tan^2 \frac{\pi}{n} \right) \sim \frac{1}{2^p} \tan^{2p} \frac{\pi}{n} \sim \frac{1}{2^p} \left(\frac{\pi}{n} \right)^{2p} = O \left(\frac{1}{n^{2p}} \right),$$

故仅当 $2p > 1$ 即 $p > \frac{1}{2}$ 时, 级数收敛.

【2611】 $a_n = \lg_b^n \left(1 + \frac{\sqrt[n]{a}}{n} \right)$ ($a > 0, b > 0$).

解 显然 $b \neq 1$ (否则 a_n 无意义). 由于

$$a_n = \frac{\ln \left(1 + \frac{\sqrt[n]{a}}{n} \right)}{n \ln b} \sim \frac{1}{\ln b} \cdot \frac{\sqrt[n]{a}}{n^2} = O \left(\frac{1}{n^2} \right),$$

故级数收敛.

【2612】 $a_n = \left[e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]^p$.

解 $\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e^{n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)} = e^{\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O \left(\frac{1}{n^3} \right) \right]} = e^{1 - \frac{1}{2n} + O \left(\frac{1}{n^2} \right)},$

由于 $a_n > 0$, 且

$$a_n = \left[e \left(1 - e^{-\frac{1}{2n} + O \left(\frac{1}{n^2} \right)} \right) \right]^p \sim e^p \left[\frac{1}{2n} + O \left(\frac{1}{n^2} \right) \right]^p = O \left(\frac{1}{n^p} \right),$$

故仅当 $p > 1$ 时, 级数收敛.

【2613】 $a_n = \frac{1}{n^{1 + \frac{k}{\ln n}}}$

提示 注意 $a_n = n^{-(1 + \frac{k}{\ln n})} = O \left(\frac{1}{n} \right)$.

解 由于 $a_n = n^{-(1 + \frac{k}{\ln n})} = e^{-(1 + \frac{k}{\ln n}) \ln n} = e^{-(\ln n + k)} = \frac{1}{n} e^{-k} = O \left(\frac{1}{n} \right)$, 故级数显然发散.

【2614】 $a_n = \frac{1}{n^{1 + \frac{1}{n}}}$.

提示 注意 $a_n = \frac{1}{n \sqrt[n]{n}} = O \left(\frac{1}{n} \right)$.

解 由于 $a_n = \frac{1}{n \sqrt[n]{n}} = O \left(\frac{1}{n} \right)$, 故级数发散.

【2615】 证明: 若存在 $\alpha > 0$ 使当 $n \geq n_0$ 时 $\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \geq 1 + \alpha$ ($a_n > 0$), 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n > 0$) 收敛; 若 $n \geq n_0$

时 $\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \leq 1$, 则此级数发散 (对数鉴别法).

证明思路 分别注意 $0 < a_n \leq \frac{1}{n^{1+\alpha}}$ 及 $a_n \geq \frac{1}{n}$, 利用比较判别法, 命题即获证.

证 若 $\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \geq 1 + \alpha$, 则 $\frac{1}{a_n} \geq n^{1+\alpha}$ 或 $a_n \leq \frac{1}{n^{1+\alpha}}$. 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛.

若 $\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \leq 1$, 则 $\frac{1}{a_n} \leq n$ 或 $a_n \geq \frac{1}{n}$. 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也发散.

研究具有如下通项的级数的收敛性:

【2616】 $a_n = n^{\ln x}$ ($x > 0$).

提示 利用 2615 题所示的对数差别法.

解 由于

$$\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} = \frac{-\ln x \ln n}{\ln n} = -\ln x,$$

故利用 2615 题的对数差别法, 即知仅当 $-\ln x > 1$ 或 $x < \frac{1}{e}$ 时, 级数收敛.

【2617】 $a_n = \frac{1}{(\ln \ln n)^{\ln n}} \quad (n > 1).$

解 $\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} = \ln[\ln(\ln n)]$. 对于 $\alpha > 0$, 显然存在 n_0 , 使当 $n \geq n_0$ 时, $\ln[\ln(\ln n)] \geq 1 + \alpha$, 故级数收敛.

【2618】 $a_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}} \quad (n > 1).$

解 $\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} = \frac{(\ln \ln n)^2}{\ln n}$. 由洛必达法则知

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln \ln x)^2}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln \ln x}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\ln x} = 0,$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\ln \ln n)^2}{\ln n} = 0$, 从而, 存在 n_0 , 使当 $n \geq n_0$ 时, 有 $\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} < 1$, 利用 2615 题的结论, 即知级数发散.

利用柯西积分判别法, 研究具有如下通项的级数的收敛性:

【2619】 $a_n = \frac{1}{n \ln^p n}.$

解题思路 注意不论 p 为何值, 当 x 充分大时, 函数 $\frac{1}{x \ln^p x}$ 为非负递减函数, 且积分

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^p x} = \begin{cases} \left. \frac{1}{(1-p) \ln^{p-1} x} \right|_2^{+\infty}, & p \neq 1, \\ \ln \ln x \Big|_2^{+\infty}, & p = 1. \end{cases}$$

解 由于不论 p 为何数, 当 x 充分大时, 函数 $\frac{1}{x \ln^p x}$ 是非负递减的, 并且

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^p x} = \begin{cases} \left. \frac{1}{(1-p) \ln^{p-1} x} \right|_2^{+\infty}, & p \neq 1, \\ \ln \ln x \Big|_2^{+\infty}, & p = 1 \end{cases}$$

仅当 $p > 1$ 时收敛, 故级数仅当 $p > 1$ 时收敛.

【2620】 $a_n = \frac{1}{n (\ln n)^p (\ln \ln n)^q} \quad (n > 2).$

解 易知函数 $f(x) = \frac{1}{x (\ln x)^p (\ln \ln x)^q}$ (不论 p, q 为何实数) 的导数当 x 充分大时是负的, 故当 x 充分大时, $f(x)$ 是非负递减函数.

若 $p = 1$, 则

$$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x (\ln \ln x)^q} = \begin{cases} \left. \frac{1}{(1-q) (\ln \ln x)^{q-1}} \right|_3^{+\infty}, & q \neq 1, \\ \ln \ln \ln x \Big|_3^{+\infty}, & q = 1. \end{cases}$$

当 $q > 1$ 时收敛, $q \leq 1$ 时发散, 故由柯西积分判别法知, 原级数当 $p = 1, q > 1$ 时收敛, $p = 1, q \leq 1$ 时发散.

若 $p \neq 1$, 作代换 $\ln x = t$, 有

$$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p (\ln \ln x)^q} = \int_{\ln 3}^{+\infty} \frac{dt}{t^p (\ln t)^q}.$$

当 $p > 1$ 时, 取 $\eta > 0$ 使 $p - \eta > 1$, 由于 (不论 q 为何实数)

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{p-\eta} \frac{1}{t^p (\ln t)^q} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^\eta (\ln t)^q} = 0,$$

故积分 $\int_{\ln 3}^{+\infty} \frac{dt}{t^p (\ln t)^q}$ 收敛, 从而, 原级数收敛; 当 $p < 1$ 时, 取 $r > 0$ 使 $p + r < 1$. 由于

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{p+r} \frac{1}{t^p (\ln t)^q} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^r}{(\ln t)^q} = +\infty,$$

故积分 $\int_{\ln 3}^{+\infty} \frac{dt}{t^p (\ln t)^q}$ 发散, 从而, 原级数发散.

综上所述, 可知原级数仅当 $p = 1, q > 1$ 及 $p > 1, q$ 任意时收敛.

【2621】 研究级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n!)}$ 的收敛性.

提示 注意 $\ln(n!) < n \ln n$, 并利用 2619 题的结果, 可知级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ 发散.

解 由于 $\ln(n!) = \sum_{k=1}^n \ln k < n \ln n$, 故 $\frac{1}{\ln(n!)} > \frac{1}{n \ln n} > 0$.

利用 2619 题中 $p = 1$ 的结果, 知级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ 发散, 故级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n!)}$ 也发散.

【2622】 证明: 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的项单调递减, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ 同时收敛或同时发散.

证明思路 令 $S_{2^n} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^n}$, 由不等式

$$0 < S_{2^n} < a_1 + (a_2 + a_3) + \cdots + (a_{2^{n-1}} + \cdots + a_{2^n-1}) < a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^n a_{2^n}$$

和不等式

$$\begin{aligned} S_{2^n} &= a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2^{n-1}-1} + \cdots + a_{2^n}) \\ &> \frac{1}{2} a_1 + a_2 + 2a_4 + \cdots + 2^{n-1} a_{2^n} = \frac{1}{2} (a_1 + 2a_2 + 2^2 a_{2^2} + \cdots + 2^n a_{2^n}) > 0, \end{aligned}$$

命题即获证.

证 设 $S_{2^n} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^n}$, 则因 $a_1 > a_2 > \cdots > a_{2^n} > a_{2^n+1} > \cdots > 0$, 故得

$$0 < S_{2^n} < a_1 + (a_2 + a_3) + \cdots + (a_{2^{n-1}} + \cdots + a_{2^n-1}) < a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^n a_{2^n}, \quad (1)$$

且有

$$\begin{aligned} S_{2^n} &= a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2^{n-1}-1} + \cdots + a_{2^n}) \\ &> \frac{1}{2} a_1 + a_2 + 2a_4 + \cdots + 2^{n-1} a_{2^n} = \frac{1}{2} (a_1 + 2a_2 + 2^2 a_{2^2} + \cdots + 2^n a_{2^n}) > 0. \end{aligned} \quad (2)$$

由(1)式得知: 若 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛; 由(2)式得知: 若 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也发散. 由此本题获证.

注意 在此命题中, 用作比较的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ 可以用更普遍的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} m^n a_{m^n}$ 来代替, 其中 m 为任一正整数. 证法类似.

【2623】 设 $f(x)$ 为单调不增的正值函数. 证明: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛, 则对于其余项 $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k)$ 有以下的估计:

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x) dx < R_n < f(n+1) + \int_{n+1}^{+\infty} f(x) dx.$$

利用此式,求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ 的和精确到 0.01.

解 由级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 的收敛性,根据柯西积分判别法,知积分 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 收敛. 由于 $f(x)$ 单调不增,故

$$f(n+k+1) \leq \int_{n+k}^{n+k+1} f(x) dx \leq f(n+k) \quad (k=1,2,3,\dots).$$

将这些不等式相加,得

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(n+k+1) \leq \int_{n+1}^{+\infty} f(x) dx \leq \sum_{k=1}^{\infty} f(n+k),$$

即

$$R_n - f(n+1) \leq \int_{n+1}^{+\infty} f(x) dx \leq R_n,$$

或

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x) dx \leq R_n \leq f(n+1) + \int_{n+1}^{+\infty} f(x) dx, \quad (1)$$

这就是所需证的不等式.

最后,利用不等式(1)来求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ 的和,精确到 0.01. 易知,当取 $n=8$ 时,即有

$$R_8 \leq \frac{1}{9^3} + \int_9^{+\infty} \frac{dx}{x^3} < 0.008,$$

故取 $\sum_{k=1}^8 \frac{1}{k^3} \approx 1.20$ 作为级数和的近似值,即可保证误差不超过 0.01.

注意 原题中将(1)中的“ \leq ”误写为“ $<$ ”,这是不对的,例如,若令 $f(x) = \frac{1}{n^2}$, 当 $n \leq x < n+1$ 时 ($n=1,2,\dots$), 则不等式(1)中左端的“ \leq ”号成为“ $=$ ”号:

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x) dx = R_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots;$$

若令 $f(x) = \frac{1}{n^2}$ 当 $n < x \leq n+1$ 时 ($n=1,2,\dots$), 则不等式(1)中右端的“ \leq ”号成为“ $=$ ”号:

$$R_n = f(n+1) + \int_{n+1}^{+\infty} f(x) dx = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots.$$

【2624】 证明叶尔马科夫判别法: 设 $f(x)$ 为单调递减的正值函数, 且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x f(e^x)}{f(x)} = \lambda.$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 在 $\lambda < 1$ 时收敛, 在 $\lambda > 1$ 时发散.

证 由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x f(e^x)}{f(x)} = \lambda$, 故对任给的 $\epsilon > 0$, 总存在 $N > 0$, 使当 $x > N$ 时, 有

$$e^x f(e^x) < (\lambda + \epsilon) f(x).$$

当 $\lambda < 1$ 时, 取 ϵ 使 $\lambda + \epsilon = \rho < 1$, 则有 $e^x f(e^x) < \rho f(x)$. 于是, 当 $m > N$ 时有

$$\int_N^m e^x f(e^x) dx < \rho \int_N^m f(x) dx,$$

即 $\int_{e^N}^{e^m} f(x) dx < \rho \int_N^m f(x) dx$, 也即

$$(1-\rho) \int_{e^N}^{e^m} f(x) dx < \rho \int_N^m f(x) dx - \rho \int_N^{e^N} f(x) dx = \rho \int_N^{e^N} f(x) dx - \rho \int_m^{e^m} f(x) dx.$$

由于 N 充分大且 $m > N$, 故 $m < e^m$. 又因 $f(x) > 0$, 故 $\int_m^{e^m} f(x) dx > 0$. 从而,

$$(1-\rho) \int_{e^N}^{e^m} f(x) dx < \rho \int_N^{e^N} f(x) dx, \quad \int_{e^N}^{e^m} f(x) dx < \frac{\rho}{1-\rho} \int_N^{e^N} f(x) dx.$$

固定 N , 让 $m \rightarrow +\infty$, 取极限即得

$$\int_{e^N}^{+\infty} f(x) dx \leq \frac{\rho}{1-\rho} \int_N^{e^N} f(x) dx = \text{常数}.$$

于是, 由柯西积分判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛.

当 $\lambda > 1$ 时, 则取 N 为充分大, 可得

$$e^x f(e^x) \geq f(x) \quad (x > N).$$

从而, $\int_N^m e^x f(e^x) dx \geq \int_N^m f(x) dx$, 即

$$\int_{e^N}^{e^m} f(x) dx \geq \int_N^m f(x) dx \quad \text{或} \quad \int_{e^N}^m + \int_m^{e^m} \geq \int_N^{e^N} + \int_{e^N}^m,$$

故

$$\int_m^{e^m} f(x) dx \geq \int_N^{e^N} f(x) dx \quad (m > N).$$

今设 $e_0 = N+1$, $e_1 = e^{e_0}$, $e_2 = e^{e_1}$, \dots , $e_{k+1} = e^{e_k}$, \dots , 并分别取 $m = e_0, e_1, e_2, \dots$, 则

$$\int_{e_1}^{e_2} f(x) dx \geq \int_N^{e^N} f(x) dx, \quad \int_{e_2}^{e_3} f(x) dx \geq \int_N^{e^N} f(x) dx, \quad \dots, \quad \int_{e_k}^{e_{k+1}} f(x) dx \geq \int_N^{e^N} f(x) dx, \dots$$

最后得

$$\int_{e_0}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_{e_{k-1}}^{e_k} f(x) dx \geq \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_N^{e^N} f(x) dx = +\infty,$$

即 $\int_{e_0}^{+\infty} f(x) dx$ 发散, 故由柯西积分判别法知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 发散.

【2625】 证明罗巴切夫斯基判别法: 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的项单调趋于零, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与级数

$\sum_{m=0}^{+\infty} p_m 2^{-m}$ 同时收敛或同时发散, 其中 p_m 是满足不等式

$$a_n \geq 2^{-m} \quad (n = 1, 2, \dots, p_m)$$

的项 a_n 的最大的序号.

证 由题设 p_m 是满足不等式 $a_n \geq 2^{-m}$ 的项 a_n 的最大序号, 故有

$$\frac{1}{2^m} \leq a_{p_{m-1}+1} < \frac{1}{2^{m-1}}, \quad \frac{1}{2^m} \leq a_{p_{m-1}+2} < \frac{1}{2^{m-1}}, \quad \dots, \quad \frac{1}{2^m} \leq a_{p_m} < \frac{1}{2^{m-1}}, \quad a_{p_m+1} < \frac{1}{2^m},$$

于是,

$$a_{p_{m-1}+1} + a_{p_{m-1}+2} + \dots + a_{p_m} \geq (p_m - p_{m-1}) \frac{1}{2^m}, \quad (1)$$

$$a_{p_{m-1}+1} + a_{p_{m-1}+2} + \dots + a_{p_m} < (p_m - p_{m-1}) \frac{1}{2^{m-1}}. \quad (2)$$

将(1)式及(2)式对 m 从 1 到 N 求和(其中 N 为任意正整数), 得

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^N (a_{p_{m-1}+1} + \dots + a_{p_m}) &\geq \sum_{m=1}^N (p_m - p_{m-1}) \frac{1}{2^m}, \\ \sum_{m=1}^N (a_{p_{m-1}+1} + \dots + a_{p_m}) &< \sum_{m=1}^N (p_m - p_{m-1}) \frac{1}{2^{m-1}}, \end{aligned}$$

由上述两个不等式可知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与级数 $\sum_{m=1}^{\infty} (p_m - p_{m-1}) \frac{1}{2^{m-1}}$ 同时收敛或同时发散. 因此, 我们如

果能证明级数 $\sum_{m=1}^{\infty} (p_m - p_{m-1}) \frac{1}{2^{m-1}}$ 与级数 $\sum_{m=1}^{\infty} p_m 2^{-m}$ 同时收敛或同时发散, 则命题即获证.

由 $\sum_{m=1}^{\infty} p_m 2^{-m}$ 的收敛性易得 $\sum_{m=1}^{\infty} (p_m - p_{m-1}) \frac{1}{2^{m-1}}$ 的收敛性. 反之, 若级数 $\sum_{m=1}^{\infty} (p_m - p_{m-1}) \frac{1}{2^{m-1}}$ 收敛, 则 $\sum_{m=1}^{\infty} p_m 2^{-m}$ 也收敛. 事实上, 记 $A = \sum_{m=1}^{\infty} (p_m - p_{m-1}) \frac{1}{2^{m-1}}$, 由于 $p_m - p_{m-1} \geq 0 (m=1, 2, \dots)$, 故有

$$\begin{aligned} A &\geq \sum_{m=1}^N (p_m - p_{m-1}) \frac{1}{2^{m-1}} = \sum_{m=1}^N p_m \frac{1}{2^{m-1}} - \sum_{m=1}^N p_{m-1} \frac{1}{2^{m-1}} = \sum_{m=1}^N p_m \frac{1}{2^{m-1}} - \sum_{l=0}^{N-1} p_l \frac{1}{2^l} \\ &= \frac{1}{2^{N-1}} p_N + \sum_{m=1}^{N-1} p_m \left(\frac{1}{2^{m-1}} - \frac{1}{2^m} \right) - p_0 = \sum_{m=1}^{N-1} p_m 2^{-m} + \frac{1}{2^{N-1}} p_N - p_0. \end{aligned}$$

若记 $S_N = \sum_{m=1}^{N-1} p_m 2^{-m}$, 则由上式得

$$S_N = \sum_{m=1}^N (p_m - p_{m-1}) \frac{1}{2^{m-1}} + p_0 - \frac{1}{2^{N-1}} p_N \leq p_0 + \sum_{m=1}^N (p_m - p_{m-1}) \frac{1}{2^{m-1}} \leq p_0 + A.$$

因而数列 $\{S_N\}$ 单调递增且有界, 故 $\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N$ 存在有限, 即级数 $\sum_{m=1}^{\infty} p_m 2^{-m}$ 收敛. 证毕.

研究下列级数的收敛性:

【2626】 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}}{n^a}.$

提示 注意 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}}{n^a}}{\frac{1}{n^{a+\frac{1}{2}}}} = 2.$

解 由于 $0 < \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}}{n^a} = \frac{4}{n^a (\sqrt{n+2} + \sqrt{n-2})}$, 而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{n^a (\sqrt{n+2} + \sqrt{n-2})}}{\frac{1}{n^{a+\frac{1}{2}}}} = 2,$$

注意到级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{a+\frac{1}{2}}}$ 仅当 $a + \frac{1}{2} > 1$ (即 $a > \frac{1}{2}$) 时收敛, 即知原级数仅当 $a > \frac{1}{2}$ 时收敛.

【2627】 $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+a} - \sqrt[4]{n^3+n+b}).$

解 利用公式 $\alpha - \beta = \frac{\alpha^4 - \beta^4}{(\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2)}$, 得

$$\sqrt{n+a} - \sqrt[4]{n^3+n+b} = \frac{(2a-1)n + a^2 - b}{(\sqrt{n+a} + \sqrt[4]{n^3+n+b})(n+a + \sqrt{n^2+n+b})}.$$

由此可知, 不论 $a = \frac{1}{2}$ 还是 $a \neq \frac{1}{2}$, 当 n 充分大时, 上式右端均保持定号, 故原级数可当成正项级数处理. 若

$a = \frac{1}{2}$, 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a^2 - b}{(\sqrt{n+a} + \sqrt[4]{n^3+n+b})(n+a + \sqrt{n^2+n+b})}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} = \frac{a^2 - b}{4},$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛, 故原级数收敛; 若 $a \neq \frac{1}{2}$, 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(2a-1)n + a^2 - b}{(\sqrt{n+a} + \sqrt[4]{n^3+n+b})(n+a + \sqrt{n^2+n+b})}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{2a-1}{4} \neq 0,$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散, 故原级数发散.

$$\text{【2628】} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\cot \frac{n\pi}{4n-2} - \sin \frac{n\pi}{2n+1} \right).$$

解题思路 注意 $\cot \frac{n\pi}{4n-2} - \sin \frac{n\pi}{2n+1} = \left(\cot \frac{n\pi}{4n-2} - 1 \right) + \left(1 - \sin \frac{n\pi}{2n+1} \right)$.

分别考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cot \frac{n\pi}{4n-2} \right)$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \sin \frac{n\pi}{2n+1} \right)$, 它们均为正项级数, 由

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cot \frac{n\pi}{4n-2}}{\frac{1}{n}} = \frac{\pi}{4} \quad \text{及} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \sin \frac{n\pi}{2n+1}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{\pi^2}{32},$$

即知原级数发散.

$$\text{解} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\cot \frac{n\pi}{4n-2} - \sin \frac{n\pi}{2n+1} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\cot \frac{n\pi}{4n-2} - 1 \right) + \left(1 - \sin \frac{n\pi}{2n+1} \right) \right],$$

分别考虑级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cot \frac{n\pi}{4n-2} \right) \quad \text{及} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \sin \frac{n\pi}{2n+1} \right),$$

它们都是正项级数, 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cot \frac{n\pi}{4n-2}}{\frac{1}{n}} = \frac{\pi}{4}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \sin \frac{n\pi}{2n+1}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{\pi^2}{32},$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cot \frac{n\pi}{4n-2} \right)$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \sin \frac{n\pi}{2n+1} \right)$ 收敛,

从而, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cot \frac{n\pi}{4n-2} - \sin \frac{n\pi}{2n+1} \right)$ 发散.

$$\text{【2629】} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\ln \frac{n+1}{n}} \right).$$

解题思路 注意当 $x \neq 0$ 及 $x > -1$ 时, 有 $\ln(1+x) < x$. 于是, 可得 $\frac{1}{n+1} < \ln \frac{n+1}{n} < \frac{1}{n}$. 从而,

$$0 < \frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\ln \frac{n+1}{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}},$$

而

$$\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}{\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}} < \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}.$$

解 当 $x \neq 0$ 及 $-1 < x < +\infty$ 时, 有 $\ln(1+x) < x$. 利用上式, 即得

$$\ln \frac{n+1}{n} = \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) < \frac{1}{n}, \quad \ln \frac{n+1}{n} = -\ln \frac{n}{n+1} = -\ln \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) > \frac{1}{n+1},$$

即

$$\frac{1}{n+1} < \ln \frac{n+1}{n} < \frac{1}{n}.$$

于是,

$$0 < \frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\ln \frac{n+1}{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}{\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}} < \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}.$$

但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛, 故原级数也收敛.

【2630】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n!)}{n^a}$.

解 先设 $a > 2$. 利用斯特林公式 $n! = \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} e^{\frac{\theta_n}{12n}}$ ($0 < \theta_n < 1$), 即得

$$\frac{\ln(n!)}{n^a} = \frac{\ln 2\pi}{2n^a} + \frac{\ln n}{2n^a} + \frac{\ln n}{n^{a-1}} + \frac{\theta_n}{12n^{a+1}} - \frac{1}{n^{a-1}}.$$

显然, 当 $a > 2$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^a}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{a-1}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_n}{n^{a+1}}$ 以及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{a-1}}$ 均收敛, 故原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n!)}{n^a}$ 收敛.

现设 $a \leq 2$. 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln n = +\infty$, 利用 139 题的结果可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \ln k}{n} = +\infty,$$

从而,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\ln(n!)}{n^a}}{\frac{1}{n^{a-1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \ln k}{n} = +\infty,$$

再注意到此时 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{a-1}}$ 发散, 即知原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n!)}{n^a}$ 发散.

【2631】 $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt[n]{n}}.$

解题思路 注意当 t 充分大时, 有 $e^t \geq At^t$ (A 为正常数), 故存在正整数 n_0 , 使当 $n \geq n_0$ 时, 有

$$e^{\sqrt[n]{n}} \geq An^{\frac{1}{3}} \quad \text{或} \quad 0 < e^{-\sqrt[n]{n}} \leq \frac{1}{A} n^{-\frac{1}{3}},$$

利用比较判别法即可获解. 利用拉比判别法也可获解.

解 解法 1: 利用拉比判别法.

$$n \left(\frac{a_n}{a_{n-1}} - 1 \right) = n (e^{\sqrt[n-1]{n-1} - \sqrt[n]{n}} - 1) = \frac{e^{\sqrt[n-1]{n-1} - \sqrt[n]{n}} - 1}{\sqrt[n-1]{n-1} - \sqrt[n]{n}} \cdot n (\sqrt[n-1]{n-1} - \sqrt[n]{n}).$$

由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n-1]{n-1} - \sqrt[n]{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n-1]{(n-1)^2} + \sqrt[n-1]{n(n-1)} + \sqrt[n]{n^2}} = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n (\sqrt[n-1]{n-1} - \sqrt[n]{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n-1]{(n-1)^2} + \sqrt[n-1]{n(n-1)} + \sqrt[n]{n^2}} = +\infty.$$

利用 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$, 即得 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n-1}} - 1 \right) = +\infty$, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt[n]{n}}$ 收敛.

解法 2: 当 t 充分大时, 有 $e^t \geq At^t$ (A 为大于零的常数), 故存在 n_0 , 使当 $n \geq n_0$ 时, 有 $e^{\sqrt[n]{n}} \geq An^{\frac{1}{3}}$. 从而,

$$0 < e^{-\sqrt[n]{n}} \leq \frac{1}{A} n^{-\frac{1}{3}}.$$

但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{3}}$ 收敛, 故原级数收敛.

【2632】 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\sqrt[n]{n}}.$

解题思路 注意当 t 充分大时, 有 $e^t \geq Bt^t$ (B 为正常数), 并仿 2631 题解法 2.

解 当 t 充分大时, 有 $e^t \geq Bt^t$ ($B > 0$ 为常数), 故存在 n_0 , 使当 $n \geq n_0$ 时, 有

$$0 < n^2 e^{-\sqrt[n]{n}} \leq \frac{1}{B} n^{-\frac{7}{2}+2} = \frac{1}{B} n^{-\frac{3}{2}}.$$

但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{3}{2}}$ 收敛, 故原级数收敛.

【2633】 $\sum_{n=1}^{\infty} (n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1).$

解题思路 注意 $a_n = n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1 = e^{\frac{\ln n}{n^2+1}} - 1 \sim \frac{\ln n}{n^2+1} \sim \frac{\ln n}{n^2}$. 又存在正整数 n_0 , 使当 $n \geq n_0$ 时, 有

$$0 < \frac{\ln n}{n^2} \leq \frac{A}{n^{\frac{3}{2}}} \quad (A \text{ 为正常数}).$$

利用比较判别法即可获解.

解 $a_n = n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1 = e^{\frac{\ln n}{n^2+1}} - 1 \sim \frac{\ln n}{n^2+1} \sim \frac{\ln n}{n^2}$. 又由于存在 n_0 , 使当 $n \geq n_0$ 时, 有 $0 < \frac{\ln n}{n^2} \leq \frac{A}{n^{\frac{3}{2}}} (A > 0, \text{常}$

数), 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{3}{2}}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ 收敛, 从而, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1)$ 收敛.

【2634】 $\sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{a \ln n + b}{c \ln n + d}}.$

解 先设 $c \neq 0$. 若 $bc - ad \neq 0$, 应用拉比判别法, 我们有

$$\begin{aligned} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) &= n \left[e^{\frac{a \ln n + b}{c \ln n + d} - \frac{a \ln(n+1) + b}{c \ln(n+1) + d}} - 1 \right] = n \left\{ e^{\frac{(bc - ad) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)}{(c \ln n + d)[c \ln(n+1) + d]}} - 1 \right\} \\ &= \frac{e^{\frac{(bc - ad) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)}{(c \ln n + d)[c \ln(n+1) + d]}} - 1}{(bc - ad) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)} \cdot \frac{(bc - ad) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{(c \ln n + d)[c \ln(n+1) + d]}. \end{aligned}$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 上述等式右端的第一个因子趋于 1, 第二个因子趋于 $bc - ad$, 第三个因子趋于零, 因此,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = 0.$$

从而, 级数发散; 若 $bc - ad = 0$, 此时 $a_n = \text{常数} > 0 (n = 1, 2, \dots)$, 故级数发散. 若 $c = 0$, 则

$$n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \frac{e^{\frac{a \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)}{d}} - 1}{-\frac{a}{d} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)} \cdot \left(-\frac{a}{d} \right) \cdot \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)}{\frac{1}{n}} \rightarrow -\frac{a}{d} \quad (d \neq 0).$$

于是, 如果 $-\frac{a}{d} > 1$ 即 $\frac{a}{d} < -1$, 则级数收敛; 如果 $-\frac{a}{d} < 1$, 则级数发散; 若 $-\frac{a}{d} = 1$, 则 $a_n = \frac{C}{n} (C > 0 \text{ 是常数})$, 从而, 级数发散.

【2635】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 \left(\sin \frac{1}{n} \right)}.$

解 考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 \frac{1}{n}}$. 由于

$$\frac{\frac{1}{\ln^2 \frac{1}{n}}}{\frac{1}{\ln^2 \left(\sin \frac{1}{n} \right)}} = \left(\frac{\ln \sin \frac{1}{n}}{\ln \frac{1}{n}} \right)^2 \quad \text{并且} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \sin \frac{1}{n}}{\ln \frac{1}{n}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin x}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{x}} = 1,$$

故

$$\frac{1}{\ln^2 \left(\sin \frac{1}{n} \right)} \sim \frac{1}{\ln^2 \frac{1}{n}} = \frac{1}{\ln^2 n}.$$

又当 $n > 1$ 时, $0 < \ln n < \sqrt{n}$, 故 $\frac{1}{\ln^2 n} > \frac{1}{n}$. 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n}$ 发散, 从而, 原级数发散.

【2636】 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{a}{n} \right)^{n^3}.$

解 若 $a=0$, 级数显然发散.

若 $a \neq 0$, 由于

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(\cos \frac{a}{n} \right)^{n^2} = e^{n^2 \ln \cos \frac{a}{n}} = e^{n^2 \ln \left[1 - \frac{a^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \right]} = e^{n^2 \left[-\frac{a^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \right]} = e^{-\frac{a^2}{2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = e^{-\frac{a^2}{2}} < 1$, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{a}{n} \right)^{n^3}$ 当 $a \neq 0$ 时收敛.

【2637】 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}} \right),$

解

$$a_n = \ln \left(\frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}} \right) = \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}} \ln \left[1 + \left(\frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}} - 1 \right) \right]^{\frac{\cos \frac{\pi}{n}}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\pi}{n}}},$$

其中 $\frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}} - 1 \rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时). 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} \pi x - \cos \pi x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi \operatorname{sh} \pi x + \pi \sin \pi x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi^2 \operatorname{ch} \pi x + \pi^2 \cos \pi x}{2} = \pi^2,$$

故得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^2}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}}}{\frac{1}{n^2}} \cdot \ln \left[1 + \left(\frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}} - 1 \right) \right]^{\frac{\cos \frac{\pi}{n}}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\pi}{n}}} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n^2}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left[1 + \left(\frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}} - 1 \right) \right]^{\frac{\cos \frac{\pi}{n}}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\pi}{n}}} \\ &= 1 \cdot \pi^2 \cdot 1 = \pi^2, \end{aligned}$$

故存在常数 $k > 0$, 有 $\left| \frac{a_n}{\frac{1}{n^2}} \right| \leq k$ (n 充分大), 即 $|a_n| \leq k \cdot \frac{1}{n^2}$, 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故原级数收敛.

【2638】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{\sqrt{n}}}.$

解 由于 $n! > \left(\frac{n}{e} \right)^{n+1}$, 故有

$$\frac{n!}{n^{\sqrt{n}}} > \frac{1}{e^n} n^{n-\sqrt{n}} = b_n.$$

但 $\sqrt[n]{b_n} = \frac{1}{e} n^{1-\frac{1}{\sqrt{n}}} \rightarrow \infty$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时), 因此, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散, 从而, 原级数发散.

*) 利用 74 题的结论.

【2639】 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$.

解 $a_n = \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n} = \frac{e^{(\ln n)^2}}{e^{n \ln(\ln n)}} = e^{-[n \ln(\ln n) - \ln^2 n]}$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln(\ln n) - \ln^2 n}{n} = +\infty,$$

故存在 n_0 , 使当 $n \geq n_0$ 时, 有 $n \ln(\ln n) - \ln^2 n \geq An$, 其中 A 为大于零的常数, 从而, 有

$$\frac{a_n}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{e^{n \ln(\ln n) - \ln^2 n}} \leq \frac{n^2}{e^{An}} \rightarrow 0 \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时}),$$

于是, 级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$ 收敛.

【2640】 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a^{\frac{1}{n}} - \frac{b^{\frac{1}{n}} + c^{\frac{1}{n}}}{2} \right) \quad (a > 0, b > 0, c > 0).$

解 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{\frac{1}{n}} - \frac{b^{\frac{1}{n}} + c^{\frac{1}{n}}}{2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{a^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} - \frac{1}{2} \left(\frac{b^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} + \frac{c^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} \right) \right] = \ln a - \frac{1}{2} (\ln b + \ln c) = \ln \frac{a}{\sqrt{bc}}.$$

当 $a \neq \sqrt{bc}$ 时 $\ln \frac{a}{\sqrt{bc}} \neq 0$, 且当 n 充分大时, 级数的项不变号, 故当 $a \neq \sqrt{bc}$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a^{\frac{1}{n}} - \frac{b^{\frac{1}{n}} + c^{\frac{1}{n}}}{2} \right)$ 发散.

当 $a = \sqrt{bc}$ 时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{(b^{\frac{1}{2n}} - c^{\frac{1}{2n}})^2}{2} \right]$. 由于当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\frac{\frac{(b^{\frac{1}{2n}} - c^{\frac{1}{2n}})^2}{2}}{\frac{1}{n^2}} \rightarrow \frac{1}{8} (\ln b - \ln c)^2,$$

并且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{(b^{\frac{1}{2n}} - c^{\frac{1}{2n}})^2}{2} \right]$ 收敛, 即当 $a = \sqrt{bc}$ 时, 原级数收敛.

【2641】 $\sum_{n=1}^{\infty} (n^{\alpha} - 1).$

解 当 $\alpha \geq 0$ 时, $a_n = n^{\alpha} - 1 \rightarrow \infty$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时), 故级数发散.

当 $-1 \leq \alpha < 0$ 时, 由于

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\alpha} - 1}{\frac{1}{x^{|\alpha|}}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{\ln x}{x^{|\alpha|}}} - 1}{\frac{1}{x^{|\alpha|}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{e^{\frac{\ln x}{x^{|\alpha|}}} \left(\frac{1}{x^{|\alpha|+1}} - |\alpha| \frac{\ln x}{x^{|\alpha|+1}} \right)}{-|\alpha| \frac{1}{x^{|\alpha|+1}}} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln x}{x^{|\alpha|}}} (\ln x - |\alpha|^{-1}) = +\infty, \end{aligned}$$

故对于 $a_n = n^{\alpha} - 1$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有 $\frac{a_n}{\frac{1}{n^{|\alpha|}}} \rightarrow \infty$. 因此, 存在常数 $k > 0$, 使 $a_n \geq k \cdot \frac{1}{n^{|\alpha|}}$, 但当 $|\alpha| \leq 1$ 时, 级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{|\alpha|}}$ 发散, 从而, 当 $-1 \leq \alpha < 0$ 时, 原级数发散.

当 $\alpha < -1$ 时, 取 β 使 $\alpha < \beta < -1$, 于是, $|\alpha| > |\beta| > 1$. 由于

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\alpha} - 1}{\frac{1}{x^{|\beta|}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{\ln x}{x^{|\alpha|}}} - 1}{\frac{1}{x^{|\beta|}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{\ln x}{x^{|\alpha|}}} \left(\frac{1}{x^{|\alpha|+1}} - |\alpha| \frac{\ln x}{x^{|\alpha|+1}} \right)}{-|\beta| \frac{1}{x^{|\beta|+1}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln x}{\beta}} \left(\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| \frac{\ln x}{x^{|\alpha| - |\beta|}} - \frac{1}{|\beta|} \cdot \frac{1}{x^{|\alpha| - |\beta|}} \right) = 0,$$

故有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^{|\beta|}}} = 0$, 但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{|\beta|}}$ 收敛, 从而, 当 $\alpha < -1$ 时, 原级数收敛.

【2642】 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\ln \frac{1}{n^a} - \ln \left(\sin \frac{1}{n^a} \right) \right].$

解 $a_n = \ln \frac{1}{n^a} - \ln \left(\sin \frac{1}{n^a} \right)$. 显然必须设 $a \geq 0$. 因若 $a < 0$, 则对于某些 n , $\ln(\sin n^{-a})$ 可能无意义. 当 $a = 0$ 时, $a_n = -\ln \sin 1 = \text{常数} > 0$ ($n = 1, 2, \dots$), 故此时级数发散, 当 $a > 0$ 时, 将 a_n 改写为

$$a_n = \ln \frac{\frac{1}{n^a}}{\sin \frac{1}{n^a}} = \ln \left[1 + \left(\frac{\frac{1}{n^a}}{\sin \frac{1}{n^a}} - 1 \right) \right] = \left(\frac{\frac{1}{n^a}}{\sin \frac{1}{n^a}} - 1 \right) \ln \left[1 + \left(\frac{\frac{1}{n^a}}{\sin \frac{1}{n^a}} - 1 \right) \right]^{\frac{\sin \frac{1}{n^a}}{\frac{1}{n^a} - \sin \frac{1}{n^a}}}$$

由于

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^a}{\sin x^a} - 1}{x^{2a}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{y}{\sin y} - 1}{y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y - \sin y}{y^2 \sin y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y - \sin y}{y^3} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \cos y}{3y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{6y} = \frac{1}{6},$$

故有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^{2a}}} = \frac{1}{6}.$$

从而得知: 当 $2a > 1$ 即 $a > \frac{1}{2}$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛; 而当 $2a \leq 1$ 即 $a \leq \frac{1}{2}$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

【2643】 $\sum_{n=1}^{\infty} a^{(b \ln n + c \ln^2 n)} \quad (a > 0).$

解 $a_n = a^{-(b \ln n + c \ln^2 n)}$. 当 $a = 1$ 时, 显然 $a_n = 1$, 因而, 级数发散. 当 $a \neq 1$ 时, 考虑

$$\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} = (b + c \ln n) \ln a.$$

利用 2615 题的结果(对数差别法), 即知:

(1) 当 $c = 0$, $b \ln a > 1$, 即 $a^b > e$ 时, 原级数收敛; 而当 $c = 0$, $b \ln a \leq 1$, 即 $a^b \leq e$ 时, 原级数发散.

(2) 当 $c \neq 0$, $c \ln a > 0$, 即 $a^c > 1$ 时, 原级数收敛; 而当 $c \neq 0$, $c \ln a < 0$ 即 $a^c < 1$ 时, 原级数发散.

综上所述, 仅当 $c = 0$, $a^b > e$ 及 $a^c > 1$ 时, 原级数收敛.

【2644】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b} (n+b)^{n+a}} \quad (a > 0, b > 0).$

解 由于

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b} (n+b)^{n+a}}}{\frac{1}{n^{a+b}}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2n+a+b}}{(n+a)^{n+b} (n+b)^{n+a}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{a}{n}\right)^{n+b} \left(1 + \frac{b}{n}\right)^{n+a}} \\ &= \frac{1}{e^a \cdot e^b} = e^{-(a+b)}, \end{aligned}$$

故当 $a+b > 1$ 时, 级数收敛; 而当 $a+b \leq 1$ 时, 级数发散.

【2645】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n+1)!]^n}{2! \cdot 4! \cdots (2n)!}.$

解 $a_n = \frac{[(n+1)!]^n}{2! \cdot 4! \cdots (2n)!}$. 由于

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+2)^n}{(n+3) \cdots (2n+2)} < \left(\frac{n+2}{n+3} \right)^n = \left[\left(1 + \frac{1}{n+2} \right)^{n+2-2} \right]^{-1} \rightarrow \frac{1}{e} < 1 \quad (\text{当 } n \rightarrow +\infty \text{ 时}),$$

于是,由 2592 题的结论知,原级数收敛.

研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的收敛性,其通项如下:

【2646】 $u_n = \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x} dx}{1+x^2}.$

提示 注意 $0 < u_n \leq \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{n^{-\frac{1}{2}} dx}{1} = n^{-\frac{3}{2}}.$

解 由于 $0 < u_n \leq \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{n^{-\frac{1}{2}} dx}{1} = n^{-\frac{3}{2}},$ 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{3}{2}}$ 收敛,故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

【2647】 $u_n = \frac{1}{\int_0^n \sqrt[4]{1+x^4} dx}.$

提示 注意 $0 < u_n \leq \frac{1}{\int_0^n x dx} = \frac{2}{n^2}.$

解 由于 $0 < u_n \leq \frac{1}{\int_0^n x dx} = \frac{2}{n^2},$ 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛,故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

【2648】 $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{x} dx.$

提示 注意 $u_n \geq \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin^2 x dx = \frac{1}{2(n+1)} > 0.$

解 由于 $u_n \geq \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin^2 x dx = \frac{1}{2(n+1)} > 0,$ 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ 发散,故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

【2649】 $u_n = \int_n^{n+1} e^{-\sqrt{x}} dx.$

提示 注意 $0 < u_n \leq e^{-\sqrt{n}},$ 可证级数 $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}}$ 收敛.

解 由于 $0 < u_n \leq e^{-\sqrt{n}},$ 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}}$ 是收敛的^{*},故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

*) 事实上, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{e^{\sqrt{n}}} = 0,$ 利用比较判别法即获证.

【2650】 $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin^3 x}{1+x} dx.$

提示 注意 $\sin^3 x$ 在 $(0, \frac{\pi}{n})$ ($n \geq 2$) 内是单调递增的,故有 $0 \leq u_n \leq \frac{\sin^3 \frac{\pi}{n}}{1+0} \cdot \frac{\pi}{n} \leq \left(\frac{\pi}{n}\right)^4$ ($n \geq 2$).

解 由于函数 $\sin^3 x$ 在 $(0, \frac{\pi}{n})$ ($n \geq 2$) 内是单调递增的,故有

$$0 \leq u_n \leq \frac{\sin^3 \frac{\pi}{n}}{1+0} \cdot \frac{\pi}{n} \leq \left(\frac{\pi}{n}\right)^4 \quad (n \geq 2).$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-4}$ 收敛,故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

【2651】 $u_n = \frac{1! + 2! + \cdots + n!}{(2n)!}.$

解 由于

$$0 < u_n \leq \frac{n \cdot n!}{n!(n+1) \cdots (2n)} = \frac{n}{(n+1) \cdots (2n)} < \frac{1}{(2n-1) \cdot 2n} \quad (\text{当 } n \text{ 足够大}),$$

且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1) \cdot 2n}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

$$\text{【2652】 } u_n = \frac{\sum_{k=1}^n \ln^2 k}{n^\alpha}.$$

解 首先, 我们证明: 当 $\alpha > 2$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛. 事实上,

$$0 < u_n \leq \frac{n \ln^2 n}{n^\alpha} = \frac{\ln^2 n}{n^{\alpha-1}}.$$

取 $\delta > 0$ 使 $\alpha - 1 - \delta > 1$, 由于 $\frac{\ln^2 n}{n^{\alpha-1}} = \frac{\ln^2 n}{n^{\alpha-1-\delta}}$, 而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^2 n}{n^\delta} = 0$, 故当 n 充分大时, 有

$$\frac{\ln^2 n}{n^{\alpha-1}} \leq \frac{C}{n^{\alpha-1-\delta}} \quad (C \text{ 为正的常数}).$$

但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1-\delta}}$ 收敛, 故当 $\alpha > 2$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

其次, 我们证明: 当 $\alpha \leq 2$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散. 事实上, 当 n 充分大时, 有

$$u_n \geq \frac{\sum_{k=1}^n \ln k}{n^2} = \frac{\ln n!}{n^2}.$$

因为当 $1 \leq r \leq n$ 时, $(n-r)(r-1) \geq 0$, 故有 $r(n-r+1) \geq n$. 令

$$r=1, \text{ 得 } 1 \cdot n = n; \quad r=2, \text{ 得 } 2(n-1) \geq n; \quad \dots; \quad r=n, \text{ 得 } n \cdot 1 = n.$$

连乘得

$$(n!)^2 \geq n^n \quad \text{或} \quad n! \geq n^{\frac{n}{2}}.$$

利用上述不等式, 可得

$$u_n \geq \frac{\ln n^{\frac{n}{2}}}{n^2} = \frac{\ln n}{2n} > \frac{1}{n} > 0 \quad (\text{当 } n \geq n_0 \text{ 时}).$$

从而, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

用相应的级数来代替数列 $x_n (n=1, 2, \dots)$, 然后研究它们的收敛性, 设:

$$\text{【2653】 } x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}.$$

解题思路 注意

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = -\frac{1}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})^2} = O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{解 } x_{n+1} - x_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})^2} = O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right). \end{aligned}$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛, 记 $x_0 = 0$, 故 $x_n = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限存在, 即数列 $\{x_n\}$ 收敛.

$$\text{【2654】 } x_n = \sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k} - \frac{(\ln n)^2}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } x_n - x_{n-1} &= \frac{\ln n}{n} - \frac{1}{2} \{ (\ln n)^2 - [\ln(n-1)]^2 \} = \frac{\ln n}{n} - \frac{1}{2} \ln \frac{n}{n-1} \cdot \ln[n(n-1)] \\ &= \frac{\ln n}{n} - \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \left[\ln n^2 + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{\ln n}{n} - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] \left[2 \ln n - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] = \frac{\ln n}{n} - \left[\frac{\ln n}{n} + O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) \right] = O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right).$$

考虑级数 $\sum_{n=2}^{\infty} (x_n - x_{n-1})$. 由级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ 的收敛性可知级数 $\sum_{n=2}^{\infty} (x_n - x_{n-1})$ 收敛, 于是,

$$x_n = \sum_{k=2}^n (x_k - x_{k-1})$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限存在, 即数列 $\{x_n\}$ 收敛.

【2655】 对于下列级数

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!}; \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!},$$

大约应取多少项来求级数的和方可精确到 10^{-5} .

解 (1) 余项

$$R_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{N}.$$

要精确到 10^{-5} , 只要 $\frac{1}{N} < 10^{-5}$, 即只要 $N > 10^5 = 100000$.

(2) 余项 $R_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!}$. 利用 74 题的不等式 $k! > \left(\frac{k}{e}\right)^k$ ($k=1, 2, \dots$), 于是, 当 $n \geq N+1$, 有

$$\frac{2^n}{(n+1)!} < 2^n \left(\frac{e}{n+1}\right)^{n+1} = \frac{1}{n+1} \left(\frac{2e}{n+1}\right)^n \leq \frac{1}{N+2} \left(\frac{2e}{N+2}\right)^N = \frac{1}{2e} \left(\frac{2e}{N+2}\right)^{N+2} \left(\frac{2e}{N+2}\right)^{n-(N+1)}.$$

因此得

$$R_N < \frac{1}{2e} \left(\frac{2e}{N+2}\right)^{N+2} \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\frac{2e}{N+2}\right)^{n-(N+1)} = \frac{1}{2e} \left(\frac{2e}{N+2}\right)^{N+2} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{2e}{N+2}\right)^l.$$

取 $N \geq 4$, 则 $\frac{2e}{N+2} < 1$, 此时又有

$$R_N < \frac{1}{2e} \left(\frac{2e}{N+2}\right)^{N+2} \frac{1}{1 - \frac{2e}{N+2}}.$$

取 $N=11$, 则有 $R_N = \frac{1}{2e} \left(\frac{2e}{13}\right)^{13} \frac{1}{1 - \frac{2e}{13}} = \Delta_N$. 利用对数对于 Δ_N 作数值计算, 有

$$\Delta_N \leq \frac{13}{15.126e} \left(\frac{2e}{13}\right)^{13} \approx 10^{-5.42266} < 10^{-5},$$

即此级数取 $N \geq 11$ 项求和就可保证精确到 10^{-5} .

(3) 余项 $R_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!}$. 仍用不等式 $k! > \left(\frac{k}{e}\right)^k$ ($k=1, 2, \dots$), 则有

$$R_N < \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\frac{e}{2n-1}\right)^{2n-1} \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\frac{e}{2N+1}\right)^{2n-1} = \left(\frac{e}{2N+1}\right)^{2N+1} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{e}{2N+1}\right)^{2l}.$$

取 $N \geq 1$, 则 $\frac{e}{2N+1} < 1$, 故有

$$R_N < \left(\frac{e}{2N+1}\right)^{2N+1} \frac{1}{1 - \left(\frac{e}{2N+1}\right)^2}.$$

今取 $N=5$, 则有

$$R_N < \left(\frac{e}{11}\right)^{11} \frac{121}{113.614} \approx 10^{-6.6374} < 10^{-5}.$$

则此级数取 $N \geq 5$ 项求和就可保证精确到 10^{-5} .

* 题号上角带“+”号表示题解答案与原习题集中译本所附答案不一致, 以后不再说明, 中译本基本是按俄文第二版翻译的, 俄文第二版中有一些错误已在俄文第三版中改正.

§ 2. 变号级数收敛性的判别法

1° 级数的绝对收敛性 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (1)$$

称为绝对收敛, 若

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \quad (2)$$

收敛. 这时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛, 绝对收敛级数的和与各项相加的顺序无关.

要确定级数(1)的绝对收敛性, 只需把对于同号级数收敛性的已知判别法应用于级数(2)即可.

若级数(1)收敛, 而级数(2)发散, 则称级数(1)为条件收敛(非绝对收敛). 通过改变各项的顺序, 可使条件收敛级数的和等于任何数(黎曼定理).

2° 莱布尼茨判别法 若交错级数

$$b_1 - b_2 + b_3 - \cdots + (-1)^{n-1} b_n + \cdots \quad (b_n \geq 0)$$

满足条件 1) $b_n \geq b_{n+1}$ ($n=1, 2, \cdots$) 和 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, 则该级数收敛(一般说来, 非绝对收敛). 在这种情形下, 对于级数的余项

$$R_n = (-1)^n b_{n+1} + (-1)^{n+1} b_{n+2} + \cdots$$

有以下的估计

$$R_n = (-1)^n \theta_n b_{n+1} \quad (0 \leq \theta_n \leq 1).$$

3° 阿贝尔判别法 若: 1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛; 2) 数 b_n ($n=1, 2, \cdots$) 构成单调有界数列, 则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \quad (3)$$

收敛.

4° 狄利克雷判别法 若: 1) 全体部分和 $A_n = \sum_{i=1}^n a_i$ 是有界的; 2) 当 $n \rightarrow \infty$ 时 b_n 单调地趋近于零, 则级数(3)收敛.

【2656】 证明: 可把非绝对收敛级数的各项在不变更其顺序的情况下分群组合起来, 使所得的新级数绝对收敛.

证 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为一收敛而非绝对收敛的级数, 利用柯西准则, 即知:

对于给定的 $\epsilon_1 = \frac{1}{2}$, 存在 N_1 , 使对于任意正整数 m_1 , 有 $|a_{N_1+1} + \cdots + a_{N_1+m_1}| < \epsilon_1$;

对于给定的 $\epsilon_2 = \frac{1}{2^2}$, 存在 N_2 (可取 $N_2 > N_1$), 使对于任意正整数 m_2 , 有 $|a_{N_2+1} + \cdots + a_{N_2+m_2}| < \epsilon_2$;

\vdots

对于给定的 $\epsilon_k = \frac{1}{2^k}$, 存在 N_k (可取 $N_k > N_{k-1}$), 使对于任意正整数 m_k , 有 $|a_{N_k+1} + \cdots + a_{N_k+m_k}| < \epsilon_k$;

\vdots

令

$$A_0 = a_1 + a_2 + \cdots + a_{N_1}, \quad A_1 = a_{N_1+1} + a_{N_1+2} + \cdots + a_{N_2}, \quad \cdots \quad A_k = a_{N_k+1} + a_{N_k+2} + \cdots + a_{N_{k+1}}, \quad \cdots$$

则有 $|A_k| < \epsilon_k = \frac{1}{2^k}$ ($k=1, 2, \cdots$), 且 $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$ 是原级数的各项在不变更其顺序的情况下分群组合起来所得

的新级数. 由于

$$\sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

收敛, 故级数 $\sum_{k=0}^{\infty} |A_k|$ 收敛, 即级数 $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$ 绝对收敛. 证毕.

【2657】 设有级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 若: (1) 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 此级数的通项 a_n 趋于零; (2) 在不变更原有顺序的情况下

下分别组合该级数的各项, 所得级数 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 收敛; (3) 在项 $A_n = \sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i$ ($1 = p_1 < p_2 < \dots$) 中相加项 a_i 的

数目是有界的, 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是收敛的.

证 设 A_n 中相加项的数目不超过某一固定的正整数 m , 即

$$p_{n+1} - p_n \leq m \quad (n=1, 2, \dots).$$

任给 $\epsilon > 0$, 考虑 $\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{2m+1} > 0$. 由 $a_n \rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时), 故存在 N' , 使当 $n \geq N'$ 时, 有 $|a_n| < \epsilon_1$. 再由 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 的收敛性知, 存在 $N_1 \geq N'$, 使当 $n \geq N_1$ 及 p 为任意正整数时, 有

$$|A_n + A_{n+1} + \dots + A_{n+p}| < \epsilon_1.$$

今取 $N = p_{N_1}$, 当 $n \geq N$ 时, 对任意正整数 s , 考察 $\Delta_{n,s} = a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+s}$, 注意每一个 a_i 必属于某一个 A_k . 记 A_n 内各项 a_i 元素的集合为 \tilde{A}_n , 即知: 当 $i < j$ 时, 若 $a_i \in \tilde{A}_k, a_j \in \tilde{A}_l$, 则必有 $k \leq l$. 今在 $\Delta_{n,s}$ 中看各项, 显然 $a_n \in \tilde{A}_{N_1+r}$ ($r \geq 0$). 再看以后各项, 便有

$$\Delta_{n,s} = B + A_{N_1+r+1} + \dots + A_{N_1+r+q} + B',$$

其中 $B = a_n + \dots + a_{p_{N_1+r+1}-1}$, $B' = a_{p_{N_1+r+q+1}} + \dots + a_{n+s}$. 很明显, B 是 A_{N_1+r} 中一部分项之和, B' 是 $A_{N_1+r+q+1}$ 中一部分项之和, 于是 (注意 $n \geq N \geq N_1 \geq N'$),

$$|B| \leq (p_{N_1+r+1} - p_{N_1+r}) \epsilon_1 \leq m \epsilon_1,$$

$$|B'| \leq (p_{N_1+r+q+1} - p_{N_1+r+q+1}) \epsilon_1 \leq m \epsilon_1,$$

$$|A_{N_1+r+1} + \dots + A_{N_1+r+q}| < \epsilon_1,$$

从而 (当 $n \geq N, s$ 为任何正整数),

$$|\Delta_{n,s}| \leq |B| + |A_{N_1+r+1} + \dots + A_{N_1+r+q}| + |B'| < (2m+1) \epsilon_1 = \epsilon.$$

根据柯西收敛准则即知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 证毕.

【2658】 证明: 若将收敛级数的各项重新排列, 使每一项离开原有的位置不超过 m 个位置 (m 为预先给定的数), 则级数的和不变.

证 设原收敛级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 当然有 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. 又记重排出的新级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, 再记 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的前 N 项部分和为 $S_N = \sum_{n=1}^N a_n$, 记 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 的前 N 项部分和为 $\sigma_N = \sum_{n=1}^N b_n$. 当然有 $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = S$. 今证 σ_N 的极限也存在, 且等于 S .

考察 σ_N 与 S_N 之差

$$\Delta_N = \sigma_N - S_N.$$

任给 $\epsilon > 0$, 取 $\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{2m} > 0$, 则存在 N_1 , 使当 $n \geq N_1$ 时, 有 $|a_n| < \epsilon_1$. 今取

$$N \geq N_1 + 2m,$$

又记 S_k 内各 a_n 项元素集合为 \tilde{S}_k , 记 σ_k 内各 b_n 项元素集合为 $\tilde{\sigma}_k$, 则有

$$\Delta_N = \sum_{b_n \in \tilde{\sigma}_N} b_n - \sum_{a_n \in \tilde{S}_N} a_n.$$

今从 a_1 查起,看 a_1, a_2, \dots 至 a_N , 注意每一个 a_i 被重排成 b_j 时, i 与 j 的标号差不超过 m . 因此,对每一个 a_i 总可以在 b_i 的前后各不超过 m 个元素内找到一个 $b_j = a_i$. 反过来,从 b_1 查起,看 b_1, b_2, \dots 至 b_N , 对每一个 b_i 总可以在 a_i 的前后各不超过 m 个元素内找到一个 $a_i = b_j$. 但也可能且只有那种可能:最后一段不超过 m 个元素的 a_i , 即 $a_N, a_{N-1}, \dots, a_{N-m}$ 之内若干个元素可能被迁到 b_N 之后,从而,在 $\bar{\sigma}_N$ 内找不到搬迁元素,但个数(设为 r 个)不超过 m . 同样,也有可能最后一段不超过 m 个元素的 b_j , 即 $b_N, b_{N-1}, \dots, b_{N-m}$ 之内若干个元素在 \bar{S}_n 内找不到搬迁元素,但个数(设为 s 个)不超过 m . 除此之外均有对应的搬迁元素且一一对应. 于是,

$$|\Delta_N| = \left| \sum_{\substack{b_n \in \bar{\sigma}_N \\ b_n \in \bar{S}_N}} b_n - \sum_{\substack{a_n \in \bar{S}_N \\ a_n \in \bar{\sigma}_N}} a_n \right| \leq \sum_{\substack{b_n \in \bar{\sigma}_N \\ b_n \in \bar{S}_N}} |b_n| + \sum_{\substack{a_n \in \bar{S}_N \\ a_n \in \bar{\sigma}_N}} |a_n| < s\varepsilon_1 + r\varepsilon_1 \leq m\varepsilon_1 + m\varepsilon_1 = \varepsilon.$$

上式中 a_n 的下标 $n \geq N_1 + m > N_1$, 故 $|a_n| < \varepsilon$. 而 b_n 的下标 $n \geq N_1 + m$, 记住 b_n 由某 a_i 搬迁而来, 其下标 i 在 n 的前后距离不超过 m , 故此时 $i \geq N_1$, 因而, 此时 $|b_n| = |a_i| < \varepsilon_1$. 从而上述不等式是成立的. 由极限定义知

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Delta_N = 0, \quad \text{也即有} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N = S.$$

从而,命题得证.

证明下列级数的收敛性并求它们的和:

【2659】 $1 - \frac{3}{2} + \frac{5}{4} - \frac{7}{8} + \dots$.

证明思路 注意

$$S_n = 1 - \frac{3}{2} + \frac{5}{2^2} - \frac{7}{2^3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{2n-1}{2^{n-1}},$$

及 $\frac{1}{2} S_n = \frac{1}{2} - \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} - \dots + (-1)^{n-2} \frac{2n-3}{2^{n-1}} + (-1)^{n-1} \frac{2n-1}{2^n},$

两式相加, 可得 $3S_n = \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} + (-1)^{n-1} \frac{2n-1}{2^{n-1}}.$

解 $S_n = 1 - \frac{3}{2} + \frac{5}{2^2} - \frac{7}{2^3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{2n-1}{2^{n-1}},$

$$\frac{1}{2} S_n = \frac{1}{2} - \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} - \dots + (-1)^{n-2} \frac{2n-3}{2^{n-1}} + (-1)^{n-1} \frac{2n-1}{2^n},$$

将上面两式相加, 得

$$\frac{3}{2} S_n = 1 - \frac{2}{2} + \frac{2}{2^2} - \frac{2}{2^3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{2}{2^{n-1}} + (-1)^{n-1} \frac{2n-1}{2^n}.$$

于是,

$$\begin{aligned} 3S_n &= 2 - 2 + \frac{2}{2} - \frac{2}{2^2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{2}{2^{n-2}} + (-1)^{n-1} \frac{2n-1}{2^{n-1}} \\ &= \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} + (-1)^{n-1} \frac{2n-1}{2^{n-1}} \rightarrow \frac{2}{3} \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时}), \end{aligned}$$

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{2}{9}$. 因此, 原级数收敛, 且其和为 $\frac{2}{9}$.

【2660】 $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \dots$.

证明思路 显然该级数绝对收敛, 从而它是收敛的, 记其和为 S . 可考虑一个特殊的部分和

$$S_{3n} = \left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6} + \cdots + \frac{1}{2^{3n-3}}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^{3n-2}}\right) - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^8} + \cdots + \frac{1}{2^{3n-1}}\right)$$

$$= \frac{5}{4} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{3n}}}{1 - \frac{1}{2^3}}.$$

解 显然该级数绝对收敛,从而,它是收敛的,记其和为 S . 考虑一个特殊的部分和

$$S_{3n} = \left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6} + \cdots + \frac{1}{2^{3n-3}}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^{3n-2}}\right) - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^5} + \cdots + \frac{1}{2^{3n-1}}\right)$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{2^{3n}}}{1 - \frac{1}{2^3}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{3n}}}{1 - \frac{1}{2^3}} - \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{3n}}}{1 - \frac{1}{2^3}} = \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2}\right) \frac{1 - \frac{1}{2^{3n}}}{1 - \frac{1}{2^3}} = \frac{5}{4} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{3n}}}{1 - \frac{1}{2^3}},$$

故得 $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{3n} = \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2^3}} = \frac{10}{7}.$

【2661】 $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$

证明思路 首先,利用 146 题的结果,有

$$S_{2n} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) = C + \ln 2n + \epsilon_{2n} - 2 \cdot \frac{1}{2}(C + \ln n + \epsilon_n)$$

$$= \ln 2 + \epsilon_{2n} - \epsilon_n.$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \ln 2.$

其次,再注意 $S_{2n+1} = S_{2n} + \frac{1}{2n+1}$, 即知 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1}.$

解 考虑部分和 S_m . 当 $m=2n$ 时,有

$$S_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$$

$$= C + \ln 2n + \epsilon_{2n} - 2 \cdot \frac{1}{2}(C + \ln n + \epsilon_n) = \ln 2 + \epsilon_{2n} - \epsilon_n = \ln 2 + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

于是,得 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \ln 2.$ 同样,当 $m=2n+1$ 时,也有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(S_{2n} + \frac{1}{2n+1}\right) = \ln 2.$$

故有 $\lim_{m \rightarrow \infty} S_m = \ln 2$, 即原级数收敛,且其和为 $\ln 2$.

*) 利用 146 题的结果.

【2662】 已知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$. 将该级数的各项重排,得到下列级数:

(1) $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots;$

(2) $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots.$

求这些级数的和.

提示 可考虑特殊的部分和 S_{3n}, S_{3n+1} 及 S_{3n+2} .

解 (1) 考虑部分和 S_m . 当 $m=3n$ 时,有

$$S_{3n} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{4n-1} + \frac{1}{4n}\right) - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right).$$

记 $\sigma_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$, $l_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$, 则 $l_{2n} = \sigma_{2n} - \sigma_n$, $l_{4n} = \sigma_{4n} - \sigma_{2n}$, 且有

$$S_{4n} = \sigma_{4n} - \frac{1}{2} \sigma_{2n} - \frac{1}{2} \sigma_n = (\sigma_{4n} - \sigma_{2n}) + \frac{1}{2} (\sigma_{2n} - \sigma_n) = l_{4n} + \frac{1}{2} l_{2n}.$$

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} l_{4n} = \lim_{n \rightarrow \infty} l_{2n} = \ln 2$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{4n} = \ln 2 + \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{3}{2} \ln 2$. 易证当 $m = 3n+1$ 及 $m = 3n+2$ 时, 有

$$S_{3n+1} = S_{3n} + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad S_{3n+2} = S_{3n} + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 它们与 S_{3n} 有相同的极限, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{3}{2} \ln 2$, 即原级数收敛, 且其和为 $\frac{3}{2} \ln 2$.

(2) 部分和

$$\begin{aligned} S_{3n} &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} \\ &= \left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4n}\right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4n}\right) \\ &\quad - \sigma_{2n} - \frac{1}{2} \sigma_n - \frac{1}{2} \sigma_{2n} = \frac{1}{2} (\sigma_{2n} - \sigma_n) = \frac{1}{2} l_{2n}, \end{aligned}$$

于是, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{3n} = \frac{1}{2} \ln 2$. 同样有

$$S_{3n+1} = S_{3n} + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad S_{3n+2} = S_{3n} + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 它们与 S_{3n} 有相同的极限, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2} \ln 2$, 即原级数收敛, 且其和为 $\frac{1}{2} \ln 2$.

【2663】 把收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ 的各项重排, 使它成为发散的.

解题思路 可这样重排: 先取两个正项, 然后取一个负项, 得

$$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n-3}} + \frac{1}{\sqrt{4n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} + \cdots$$

将上述重排后所得的级数每相邻三项结合而得一个新级数, 并注意

$$\frac{1}{\sqrt{4n-3}} + \frac{1}{\sqrt{4n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} > \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2n}} > 0.$$

解 我们这样进行重排: 先取两个正项, 然后取一个负项, 得

$$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n-3}} + \frac{1}{\sqrt{4n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} + \cdots \quad (1)$$

将上述重排后所得的级数(1)每相邻三项结合而得一个新级数, 如果它发散, 当然上述重排后所得的级数也发散. 由于

$$\frac{1}{\sqrt{4n-3}} > \frac{1}{\sqrt{4n}}, \quad \frac{1}{\sqrt{4n-1}} > \frac{1}{\sqrt{4n}},$$

故有

$$\frac{1}{\sqrt{4n-3}} + \frac{1}{\sqrt{4n-1}} > \frac{2}{\sqrt{4n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2n}},$$

因而,

$$\frac{1}{\sqrt{4n-3}} + \frac{1}{\sqrt{4n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} > \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2n}} > 0 \quad (n=1, 2, \cdots).$$

但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \right) \frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{4n-3}} + \frac{1}{\sqrt{4n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} \right)$ 发散, 从而, 重排后所得的级数(1)也发散.

研究变号级数的收敛性:

【2664】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2^n}.$

提示 注意 $|a_n| = \frac{1}{2^n}.$

解 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 收敛, 故原级数绝对收敛, 从而也是收敛的.

【2665】 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+100}{3n+1} \right)^n.$

解 $a_n = (-1)^n \left(\frac{2n+100}{3n+1} \right)^n.$ 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+100}{3n+1} = \frac{2}{3} < 1,$$

故原级数绝对收敛, 从而也是收敛的.

【2666】 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \dots.$

解题思路 将此级数每相邻三项结合得一新级数, 显然可知它是一个交错级数, 再利用 2657 题的结果.

解 将此级数每相邻三项结合得一新级数, 它是交错级数, 满足莱布尼茨判别法的两个条件, 因而, 它是收敛的. 利用 2657 题的结果, 即知原级数收敛. 显然此级数仅为条件收敛.

【2667】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{100} n}{n} \sin \frac{n\pi}{4}.$

提示 利用狄利克雷判别法.

解 由于当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\frac{\ln^{100} n}{n}$ 单调下降趋于零, 且

$$\left| \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{4} \right| = \left| \frac{\cos \frac{\pi}{8} - \cos(n + \frac{1}{2}) \frac{\pi}{4}}{2 \sin \frac{\pi}{8}} \right| \leq \frac{1}{\sin \frac{\pi}{8}}$$

为有界的, 故按狄利克雷判别法即知原级数收敛.

【2668】 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}.$

解 将通项改写为

$$(-1)^n \frac{\sin^2 n}{n} = (-1)^n \frac{1}{2n} + (-1)^{n+1} \frac{\cos 2n}{2n}.$$

显然级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n}$ 收敛, 下面证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos 2n}{2n}$ 也收敛. 事实上, 部分和

$$S_N = \sum_{n=1}^N (-1)^{n+1} \frac{\cos 2n}{2n} = \sum_{n=1}^N \frac{\cos 2n}{2n} - \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \frac{2 \cos 4n}{4n} = S_N^{(1)} - S_N^{(2)}.$$

但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n}{2n}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 4n}{2n}$ 均收敛 (因为当 $k \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{2k}$ 单调趋于零, 且

$$\left| \sum_{n=1}^k \cos 2n \right| = \left| \frac{\sin(2k+1) - \sin 1}{2 \sin 1} \right| \leq \frac{1}{\sin 1},$$

故由狄利克雷判别法即获证), 记它们的和分别为 $S^{(1)}$ 及 $S^{(2)}$, 则当 $N \rightarrow \infty$ 时, $S_N \rightarrow S^{(1)} - S^{(2)}$, 即级数

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos 2n}{2n}$ 收敛, 从而, 原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}$ 收敛.

【2669】 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100}.$

解 $(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100} = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right).$

显见级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 均收敛, 故原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100}$ 收敛.

【2670】 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$

解 $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left[1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right] = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right).$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 均收敛, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 故原级数发散.

【2671】 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 + k^2}).$

解 $\sin(\pi \sqrt{n^2 + k^2}) = \sin \left[n\pi \sqrt{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2} \right] = \sin n\pi \left[1 + \frac{k^2}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right) \right] = \sin \left[n\pi + \frac{k^2\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right]$
 $= (-1)^n \sin \left[\frac{k^2\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right] = (-1)^n \frac{k^2\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right),$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{k^2\pi}{2n}$ 条件收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ 收敛, 故原级数收敛.

【2672】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}.$

解 这级数首先出现三个负项, 之后出现五个正项, 如此下去, 若将这些相邻且具有相同符号的几项合并成一项, 则所得的新级数为一交错级数:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left[\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2+1} + \cdots + \frac{1}{(k+1)^2-1} \right]. \quad (1)$$

容易证明不等式

$$\frac{2}{k+1} < \underbrace{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2+1} + \cdots + \frac{1}{k^2+k}}_{k \text{ 项}} + \underbrace{\frac{1}{k^2+k} + \cdots + \frac{1}{(k+1)^2-1}}_{(k+1) \text{ 项}} < \frac{2}{k}$$

事实上, 开头 k 项的和小于 $k \cdot \frac{1}{k^2} = \frac{1}{k}$, 而后面 $k+1$ 项的和小于 $(k+1) \cdot \frac{1}{k^2+k} = \frac{1}{k}$, 所以整个和数小于 $\frac{2}{k}$. 左面的不等式可由整个和数大于 $k \cdot \frac{1}{k^2+k} + (k+1) \cdot \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{2}{k+1}$ 而得.

于是, 级数(1)的通项当 $k \rightarrow \infty$ 时趋于零, 并且它的绝对值单调减小, 由莱布尼茨判别法即知级数(1)收敛.

注意 原级数的部分和恰好包含在级数(1)的某相邻两部分和之间, 由级数(1)的收敛性知此两相邻部分和趋于同一极限, 因此, 原级数部分和有极限, 从而, 原级数收敛. 显然 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n} \right|$ 发散, 故原级数仅为条件收敛.

【2673】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}.$

提示 利用 65 题的结果.

解 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$, 即通项不趋于零, 故级数发散.

【2674】 证明:若 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{b_n}{b_{n-1}} - 1 \right) > 0$, 则交错级数 $b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \cdots + (-1)^{n-1} b_n + \cdots$ ($b_n > 0$) 收敛.

证 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{b_n}{b_{n-1}} - 1 \right) = A$, 我们取 $\epsilon > 0$, 使得 $A - \epsilon > 0$, 则存在正整数 N , 使当 $n \geq N$ 时, 有

$$A - \epsilon < n \left(\frac{b_n}{b_{n-1}} - 1 \right) < A + \epsilon \quad \text{或} \quad 1 < 1 + \frac{A - \epsilon}{n} < \frac{b_n}{b_{n-1}} < 1 + \frac{A + \epsilon}{n}.$$

因此, 当 $n \geq N$ 时, $b_n > b_{n-1}$, 即 b_n 单调下降.

下面证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$. 事实上, 利用 2606 题的结果即知,

$$b_n = o\left(\frac{1}{n^{A-\epsilon}}\right).$$

例如, 取 $\epsilon = \frac{A}{2}$, 于是, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有 $b_n \rightarrow 0$.

因此, 交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$ 收敛.

研究下列级数的绝对收敛性(除了习题 2690)和条件收敛性:

【2675】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}.$

提示 当 $p \leq 0$ 时, 级数发散. 当 $0 < p \leq 1$ 时, 级数条件收敛. 当 $p > 1$ 时, 级数绝对收敛.

解 当 $p < 0$ 时, 由于 $n^{-p} \rightarrow +\infty$, 故级数发散.

当 $p = 0$ 时, 由于 $n^{-p} = 1$, 故级数也发散.

当 $0 < p \leq 1$ 时, 由于 $a_n > a_{n+1}$ 且 $a_n \rightarrow 0$ (其中 $a_n = \frac{1}{n^p}$), 故此交错级数收敛; 然当 $0 < p \leq 1$ 时, 级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 发散, 故此时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ 仅为条件收敛.

当 $p > 1$ 时, 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ 绝对收敛.

【2676】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{p+\frac{1}{n}}}.$

解 首先研究此级数当 p 为何值时绝对收敛. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^{p+\frac{1}{n}}}}{\frac{1}{n^p}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1.$$

且当 $p > 1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 收敛, 故当 $p > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{p+\frac{1}{n}}}$ 绝对收敛.

当 $p \leq 0$ 时, 原级数显然发散.

下面研究当 $0 < p \leq 1$ 时原级数的收敛性, 将通项改写成 $\frac{(-1)^{n-1}}{n^p} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$. 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ 当 $0 < p \leq 1$ 时条件收敛, 而数列 $\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ 为一单调上升且趋于 1 的数列, 故由阿贝尔判别法即知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{p+\frac{1}{n}}}$ 收

敛. 但因级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p+\frac{1}{n}}}$ 当 $0 < p \leq 1$ 时发散, 故当 $0 < p \leq 1$ 时, 原级数仅为条件收敛.

【2677】 $\sum_{n=2}^{\infty} \ln \left[1 + \frac{(-1)^n}{n^p} \right].$

解 $\ln \left[1 + \frac{(-1)^n}{n^p} \right] = \frac{(-1)^n}{n^p} - \frac{1}{2n^{2p}} + O\left(\frac{1}{n^{3p}}\right).$

考虑级数 (1) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$, (2) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}}$, (3) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{3p}}$.

显然当 $p > 1$ 时, 级数(1), (2), (3)均绝对收敛. 故当 $p > 1$ 时, 原级数绝对收敛.

当 $\frac{1}{2} < p \leq 1$ 时, 级数(1)条件收敛, 级数(2)及(3)均绝对收敛, 故当 $\frac{1}{2} < p \leq 1$ 时原级数条件收敛.

当 $p \leq 0$ 时, 由于通项不趋于零, 故原级数发散.

最后, 设 $0 < p \leq \frac{1}{2}$. 令 m 是满足 $mp \leq 1 < (m+1)p$ 的唯一正整数(显然 $m \geq 2$). 我们有

$$\ln \left[1 + \frac{(-1)^n}{n^p} \right] = \frac{(-1)^n}{n^p} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^{2p}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{(-1)^{3n}}{n^{3p}} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{n^{4p}} \\ + \cdots + (-1)^{m-1} \cdot \frac{1}{m} \cdot \frac{(-1)^{mn}}{n^{mp}} + O\left(\frac{1}{n^{(m+1)p}}\right).$$

若 m 为偶数, 则由于交错级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{3n}}{n^{3p}}$, \dots , $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)n}}{n^{(m-1)p}}$ 均收敛(条件收敛), 级数

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{(m+1)p}}$ (绝对)收敛, 而级数

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^{2p}} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{n^{4p}} + \cdots + \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{n^{mp}} \right)$$

显然发散, 故知原级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \ln \left[1 + \frac{(-1)^n}{n^p} \right]$ 发散; 若 m 为奇数, 则可类似地证明原级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \ln \left[1 + \frac{(-1)^n}{n^p} \right]$ 也发散.

【2678】 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^n \sin^2 x}{n}.$

解 $a_n = (-1)^{n-1} \frac{2^n \sin^2 x}{n}$. 考虑

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{2} \sin x)^2}{\sqrt[n]{n}} = (\sqrt{2} \sin x)^2,$$

故当 $\sqrt{2} \sin^2 x < 1$, 即 $|x - n\pi| < \frac{\pi}{4}$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛.

当 $\sqrt{2} \sin^2 x = 1$, 即当 $|x - n\pi| = \frac{\pi}{4}$ 时, 原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$, 它为条件收敛.

当 $\sqrt{2} \sin^2 x > 1$ 时, 例如, 可选取 a , 使 $\sqrt{2} \sin^2 x > a > 1$. 当 n 充分大时, 有

$$\sqrt[n]{|a_n|} \geq a \quad \text{或} \quad |a_n| \geq a^n > 1,$$

上式表明, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, a_n 并非趋于零, 故此时原级数发散.

【2679】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}.$

提示 对于不为负整数的任何 x 值, 级数条件收敛.

解 当 x 为负整数时, 级数显然无意义.

当 x 不为负整数时, 此交错级数满足莱布尼茨判别法的条件, 故它是收敛的. 但因 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x+n}$ 发散, 故原级数当 x 不为负整数时仅为条件收敛.

【2680】 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[n+(-1)^n]^p}.$

解 $\frac{(-1)^n}{[n+(-1)^n]^p} = \frac{(-1)^n}{n^p \left[1 + \frac{(-1)^n}{n} \right]^p} = \frac{(-1)^n}{n^p} \left[1 - \frac{p(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] = \frac{(-1)^n}{n^p} - \frac{p}{n^{p+1}} + O\left(\frac{1}{n^{p+2}}\right).$

当 $0 < p \leq 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$ 条件收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p+1}}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p+2}}$ 绝对收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[n+(-1)^n]^p}$ 当 $0 < p \leq 1$ 时条件收敛.

当 $p > 1$ 时, 由 $\frac{(-1)^n}{[n + (-1)^n]^p} = O\left(\frac{1}{n^p}\right)$ 即知, 原级数绝对收敛.

当 $p \leq 0$ 时, 通项不趋于零, 原级数显然发散.

【2681】
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{[\sqrt{n} + (-1)^{n-1}]^p}.$$

解 由于

$$\frac{(-1)^{n-1}}{[\sqrt{n} + (-1)^{n-1}]^p} = \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\frac{p}{2}}} \left[1 + \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} \right]^{-p} = \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\frac{p}{2}}} - \frac{p}{n^{\frac{p+1}{2}}} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{p}{2}+1}}\right), \quad (1)$$

故原级数当 $p > 2$ 时绝对收敛; 而当 $p \leq 0$ 时原级数显然发散. 下面我们来研究当 $0 < p \leq 2$ 时原级数的收敛性.

当 $1 < p \leq 2$ 时, 由 (1) 式第一项组成的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\frac{p}{2}}}$ 条件收敛, 而由第二项、第三项组成的级数显然收敛, 故此时原级数条件收敛.

当 $0 < p \leq 1$ 时, 由第一项及第三项组成的级数收敛, 但由第二项组成的级数发散, 故此时原级数发散.

【2682】
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p + \sin \frac{n\pi}{4}}.$$

解
$$\frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p + \sin \frac{n\pi}{4}} = \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p} \left(1 + \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p} \right)^{-1} = \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p} \left[1 - \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p} + O\left(\frac{1}{n^{2p}}\right) \right] = \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p} - \frac{\sin^2 \frac{n\pi}{4}}{n^{2p}} + O\left(\frac{1}{n^{3p}}\right).$$

当 $2p > 1$ 即 $p > \frac{1}{2}$ 时, 由第二项及第三项所组成的级数均收敛, 而对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p}$, 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = 0$ 且 $\frac{1}{n^p}$ 单调减小, 又

$$\left| \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{4} \right| = \left| \frac{\cos \frac{\pi}{8} - \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{4}}{2 \sin \frac{\pi}{8}} \right| \leq \frac{1}{\sin \frac{\pi}{8}},$$

故由狄利克雷判别法知它是收敛的. 从而, 当 $p > \frac{1}{2}$ 时, 原级数收敛. 又因

$$\left| \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p} \right| \geq \frac{\sin^2 \frac{n\pi}{4}}{n^p} = \frac{1}{2n^p} - \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{2n^p},$$

且当 $\frac{1}{2} < p \leq 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{n^p}$ 收敛, 故当 $\frac{1}{2} < p \leq 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p} \right|$ 发散, 从而, 此时原级数条件收敛.

当 $p > 1$ 时, 由 $\frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p + \sin \frac{n\pi}{4}} = O\left(\frac{1}{n^p}\right)$ 即知, 原级数绝对收敛.

当 $p \leq 0$ 时, 原级数显然发散.

当 $0 < p \leq \frac{1}{2}$ 时, 由于 $\frac{\sin^2 \frac{n\pi}{4}}{n^{2p}} \geq \frac{\sin^2 \frac{n\pi}{4}}{n} = \frac{1 - \cos n\pi}{2n} \geq 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ 发散, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{2n}$ 收敛, 故级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{n\pi}{4}}{n}$ 发散, 从而, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{n\pi}{4}}{n^{2p}}$ 发散. 再仿 2677 题 $0 < p \leq \frac{1}{2}$ 情形的证明, 则易知原级数发散.

【2683】
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}}.$$

解 通项为

$$a_n = (-1)^n \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt[100]{n}} = (-1)^n \frac{1}{\sqrt[100]{n}} \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right] = \frac{(-1)^n}{\sqrt[100]{n}} + O\left(\frac{1}{n^{1+\frac{1}{100}}}\right).$$

显然 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{100}}}$ 绝对收敛, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[100]{n}}$ 条件收敛, 故原级数条件收敛.

【2684】
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{n^{100}}{2^n}.$$

解 考虑绝对值组成的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{n^{100}}{2^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{100}}{2^n}.$$

由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^{100}}{2^{n+1}}}{\frac{n^{100}}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{100} = \frac{1}{2} < 1,$$

故原级数绝对收敛.

【2685】
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}.$$

解 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln n}{n}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n}} = e^0 = 1,$$

从而知通项 $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时并不趋于零, 故原级数发散.

【2686】
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{12}}{\ln n}.$$

解 由于 $\frac{1}{\ln n}$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时单调下降趋于零, 又部分和

$$\left| \sum_{m=2}^n \sin \frac{m\pi}{12} \right| = \left| \frac{\cos \frac{\pi}{24} - \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{12}}{2 \sin \frac{\pi}{24}} \right| \leq \frac{1}{\sin \frac{\pi}{12}}$$

有界, 故级数收敛. 但是,

$$\left| \frac{\sin \frac{n\pi}{12}}{\ln n} \right| \geq \frac{\sin^2 \frac{n\pi}{12}}{\ln n} = \frac{1 - \cos \frac{n\pi}{6}}{2 \ln n} = \frac{1}{2 \ln n} - \frac{\cos \frac{n\pi}{6}}{2 \ln n},$$

而级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ 发散, 级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{6}}{\ln n}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{\sin \frac{n\pi}{12}}{\ln n} \right|$ 发散. 从而, 原级数仅为条件收敛.

【2687】
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^p}.$$

解 记 $A_l = \{n | [\sqrt{n}] = l\}$ ($l=1, 2, \dots$). 显然 A_l 中的元素 n 满足 $l^2 \leq n < (l+1)^2$, 于是, A_l 中元素的个数为 $2l+1$. 考虑 $u_l = \sum_{n \in A_l} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^p}$, 则有

$$u_l = \sum_{n \in A_l} \frac{(-1)^l}{n^p} = (-1)^l v_l,$$

其中 $v_l = \sum_{n \in A_l} \frac{1}{n^p}$. 当 $p > 0$ 时, 有

$$v_l - v_{l-1} = \sum_{s=0}^{2l} \frac{1}{(l^2+s)^p} - \sum_{s=0}^{2(l-1)} \frac{1}{[(l+1)^2+s]^p}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{s=0}^{2l} \left\{ \frac{1}{(l^2+s)^p} - \frac{1}{[(l+1)^2+s]^p} \right\} - \frac{1}{[(l+1)^2+2l+1]^p} - \frac{1}{[(l+1)^2+2l+2]^p} \\
&= \sum_{s=0}^{2l} \frac{[(l+1)^2+s]^p - (l^2+s)^p}{(l^2+s)^p [(l+1)^2+s]^p} - \frac{1}{[(l+1)^2+2l+1]^p} - \frac{1}{[(l+1)^2+2l+2]^p}.
\end{aligned}$$

考虑函数 $f(x) = x^r (r > 1)$. 当 $x > y > 0$ 时, 由微分学中值公式, 有

$$x^r - y^r = r\xi^{r-1}(x-y) \geq xy^{r-1}(x-y),$$

其中 $y < \xi < x$.

于是, 令 $r = 2p$, $x = \sqrt{(l+1)^2 + s}$, $y = \sqrt{l^2 + s}$, 则当 $p > \frac{1}{2}$ 时, 有

$$\begin{aligned}
&[(l+1)^2 + s]^p - (l^2 + s)^p \\
&= (\sqrt{(l+1)^2 + s})^{2p} - (\sqrt{l^2 + s})^{2p} \geq 2p(\sqrt{l^2 + s})^{2p-1} [\sqrt{(l+1)^2 + s} - \sqrt{l^2 + s}] \\
&= 2p(\sqrt{l^2 + s})^{2p-1} \frac{2l+1}{\sqrt{(l+1)^2 + s} + \sqrt{l^2 + s}} \geq \frac{2p l^{2p-1} (2l+1)}{2\sqrt{l^2 + 4l+1}},
\end{aligned}$$

从而, 当 $p > \frac{1}{2}$ 时, 有

$$v_l - v_{l+1} \geq \frac{p l^{2p-1} (2l+1)^2}{(l^2 + 4l+1)^{2p+\frac{1}{2}}} - \frac{2}{(l^2 + 4l+2)^p} \geq \frac{2l^{2p-1} (l^2 + l + \frac{1}{4})}{(l^2 + 4l+1)^{2p-\frac{1}{2}}} \left(2p - \frac{(l^2 + 4l+1)^{p+\frac{1}{2}}}{l^{2p-1} (l^2 + l + \frac{1}{4})} \right).$$

由于 $2p > 1$, 而

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \frac{(l^2 + 4l+1)^{p+\frac{1}{2}}}{l^{2p-1} (l^2 + l + \frac{1}{4})} = 1,$$

故当 l 充分大时, $u_l - v_{l+1} > 0$. 于是, 存在 l_0 , 使当 $l \geq l_0$ 时, v_l 是单调下降的数列. 又当 $n \in A_l$, $p > 0$ 时, 有

$$\frac{1}{(l+1)^{2p}} < \frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{l^{2p}}, \quad \text{故} \quad \frac{2l+1}{(l+1)^{2p}} < v_l \leq \frac{2l+1}{l^{2p}}.$$

上述不等式说明, 当 $p > \frac{1}{2}$ 时, v_l 是单调下降且趋于零的数列 (当 $l \rightarrow \infty$), 从而知级数

$$\sum_{l=1}^{\infty} u_l = \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l v_l$$

是一个收敛级数. 显然当 $\frac{1}{2} < p \leq 1$ 时, 级数 $\sum_{l=1}^{\infty} u_l$ 仅为条件收敛. 当 $p > 1$ 时, 级数 $\sum_{l=1}^{\infty} u_l$ 绝对收敛. 当

$p \leq \frac{1}{2}$ 时, 级数 $\sum_{l=1}^{\infty} u_l$ 发散.

现在看原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 其中 $a_n = \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^p}$. 记其部分和为 $S_N = \sum_{n=1}^N a_n$, 又记 $\sum_{l=1}^{\infty} u_l$ 的部分和为 $\sigma_M = \sum_{n=1}^M u_n$. 那么任意一个部分和 S_N 均被包含在某相邻两个部分和 σ_M 与 σ_{M+1} 之间, 即有

$$|S_N - \sigma_M| \leq |\sigma_{M+1} - \sigma_M|.$$

注意, 当 $\frac{1}{2} < p \leq 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛, 而当 $p > 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛. 此时记其和为 σ , 则有 $\lim_{M \rightarrow \infty} \sigma_M = \sigma$. 因此,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \lim_{M \rightarrow \infty} \sigma_M = \sigma,$$

也即 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 有同样的收敛结论. 从而当 $\frac{1}{2} < p \leq 1$ 时, 原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛; 当 $p > 1$ 时绝对收

敛, 当 $p \leq \frac{1}{2}$ 时发散 (否则这时的 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛), 其中当 $p = 1$ 时就是 2672 题.

【2688】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\ln n]}}{n}$.

解 记 $a_n = \frac{(-1)^{[\ln n]}}{n}$, 为研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的收敛性, 我们引进集合

$$A_k = \{n | [\ln n] = k\} \quad (k=1, 2, \dots).$$

那么集合 A_k 内的元素 n 具有性质 $k \leq \ln n < k+1$, 或写成 $e^k \leq n < e \cdot e^k$, 其个数 $p_k = [(e-1)e^k]$. 将 A_k 内的元素从小到大排列, 可记为 $n_k, n_k+1, \dots, n_k+p_k-1$. 现考虑

$$u_k = \sum_{n \in A_k} a_n = \sum_{n \in A_k} \frac{(-1)^{[\ln n]}}{n} = (-1)^k \sum_{n \in A_k} \frac{1}{n} = (-1)^k v_k,$$

其中

$$v_k = \sum_{n \in A_k} \frac{1}{n} = \sum_{v=0}^{p_k-1} \frac{1}{n_k+v} \geq \sum_{v=0}^{p_k-1} \frac{1}{e \cdot e^k} = \frac{p_k}{e \cdot e^k} = \frac{1}{e \cdot e^k} [(e-1)e^k] \geq \frac{1}{e \cdot e^k} \cdot \frac{1}{2} (e-1)e^k = \frac{e-1}{2e}.$$

下面我们证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是发散的. 采用反证法, 假设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则由柯西准则, 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 N_0 , 使当 $n \geq N_0$ 时, 对于一切正整数 p , 均有

$$|a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

今取 $\varepsilon = \frac{e-1}{4e} > 0$, 对于由此 ε 所找到的 N_0 , 在 $n \geq N_0$ 中选一数 n_k , 此处 k 是适当大的一个正整数, 有 $n_k \in A_k$, 即 $e^k \leq n_k < e \cdot e^k$. 又取正整数 $p = p_k - 1$, 则此时应有

$$|a_{n_k} + a_{n_k+1} + \dots + a_{n_k+p_k-1}| < \varepsilon. \quad (1)$$

但另一方面却有

$$|a_{n_k} + a_{n_k+1} + \dots + a_{n_k+p_k-1}| = |u_k| = v_k \geq \frac{e-1}{2e} = 2\varepsilon > \varepsilon. \quad (2)$$

(1)式与(2)式矛盾. 因而, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

【2689】 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \right]^p.$

解 设 $a_n = (-1)^{n-1} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \right]^p.$

当 $p \leq 0$ 时, 显然 $|a_n| \geq 1$, 故 a_n 不趋于零 (当 $n \rightarrow \infty$), 因而, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

当 $0 < p \leq 2$ 时, 记 $a_n = (-1)^{n-1} b_n$, 其中

$$b_n = \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \cdots (2n)} \right]^p.$$

由 $\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^p < 1$ 易知 $b_n > \left[\frac{2n+1}{2(n+1)}\right]^p b_n = b_{n+1}$ ($n=1, 2, \dots$), 且有 (见 10 题的不等式)

$$0 < b_n < \left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)^p \rightarrow 0 \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时}),$$

故由莱布尼茨判别法即知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 但由 2598 题的结果知, 当 $0 < p \leq 2$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散. 于是, 当 $0 < p \leq 2$ 时, 原级数条件收敛.

当 $p > 2$ 时, 由 2598 题的结果知, 原级数绝对收敛.

【2690】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cdot \sin n^2}{n}.$

解 记 $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \sin n \cdot \sin n^2$. 显然 $\{a_n\}$ 单调下降趋于零, 且

$$\left| \sum_{n=1}^N b_n \right| = \left| \sum_{n=1}^N \frac{1}{2} [\cos n(n-1) - \cos n(n+1)] \right| = \left| \frac{1}{2} [\cos 0 - \cos N(N+1)] \right| \leq 1,$$

有界($N=1, 2, \dots$), 故由狄利克雷判别法知级数收敛.

【2691】 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n^2$.

提示 用反证法证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n^2 \neq 0$.

解 我们即将指出 $\sin n^2$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时并不趋于零, 因而, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n^2$ 发散. 现用反证法, 假设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n^2 = 0,$$

于是, $\sin^2(n^2) \rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时). 由 $\sin^2(n^2) + \cos^2(n^2) = 1$ 知 $\cos^2(n^2) \rightarrow 1$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时). 由于

$$\sin(n+1)^2 = \sin(n^2 + 2n + 1) = \sin n^2 \cos(2n+1) + \cos n^2 \sin(2n+1),$$

故

$$\cos^2(n^2) \sin^2(2n+1) = [\sin(n+1)^2 - \sin n^2 \cos(2n+1)]^2.$$

让 $n \rightarrow \infty$, 注意 $\sin n^2 \rightarrow 0$. 于是, 由

$$\sin(n+1)^2 \rightarrow 0 \quad \text{及} \quad \cos^2(n^2) \rightarrow 1,$$

便有 $\sin^2(2n+1) \rightarrow 0$, 因此, $\sin(2n+1) \rightarrow 0$. 同理可得 $\sin(2n-1) \rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时). 又从

$$\sin(2n+1) + \sin(2n-1) = 2\sin 2n \cos 1$$

知还有 $\sin 2n \rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时), 即有 $\sin m \rightarrow 0$ (当 $m \rightarrow \infty$ 时), 从而也有 $\sin^2 n \rightarrow 0$ 及 $\cos^2 n \rightarrow 1$. 但

$$\sin(n+1) = \sin n \cos 1 + \cos n \sin 1,$$

或写成

$$\cos^2 n \sin^2 1 = [\sin(n+1) - \sin n \cos 1]^2.$$

让 $n \rightarrow \infty$, 于上式的两端取极限, 并注意到 $\sin^2 1 \neq 0, \cos^2 n \rightarrow 1$, 从而产生左端为 $\sin^2 1$ 而右端为零的矛盾. 因此, 假设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n^2 = 0$$

不真, 即原命题 $\sin n^2 \not\rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时) 成立. 因此, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n^2$ 发散.

【2692】 设

$$R(x) = \frac{a_0 x^p + a_1 x^{p-1} + \dots + a_p}{b_0 x^q + b_1 x^{q-1} + \dots + b_q}$$

为有理函数, 式中 $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$, 且当 $x \geq n_0$ 时, $|b_0 x^q + b_1 x^{q-1} + \dots + b_q| > 0$.

研究级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n R(n)$ 的绝对收敛性和条件收敛性.

解 首先考虑绝对收敛性.

当 $q - p > 1$ 即当 $q > p + 1$ 时, 由于

$$|R(n)| = \left| \frac{a_0 + a_1 n^{-1} + \dots + a_p n^{-p}}{b_0 n^{q-p} + b_1 n^{q-p-1} + \dots + b_q n^{-p}} \right| \sim \frac{|a_0|}{|b_0| n^{q-p}},$$

而 $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^{q-p}}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n R(n)$ 绝对收敛. 当 $q \leq p + 1$ 时, 级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty} |R(n)|$ 发散.

但当 $p < q$ 时, $(-1)^n R(n) \sim (-1)^n \frac{a_0}{b_0 n^{q-p}}$, 容易验证原级数符合莱布尼茨判别法的条件, 故当 $p < q \leq$

$p + 1$ 时, 级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n R(n)$ 条件收敛.

当 $p \geq q$ 时, 显见 $R(n) \not\rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时), 故级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n R(n)$ 发散.

研究下列级数的收敛性:

【2693】 $\frac{1}{1^p} - \frac{1}{2^q} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^q} + \frac{1}{5^p} - \frac{1}{6^q} + \dots$.

解 当 $p > 1, q > 1$ 时, 显然级数绝对收敛.

当 $0 < p = q \leq 1$ 时, 显然级数并非绝对收敛, 但由莱布尼茨判别法知级数收敛. 因此, 当 $0 < p = q \leq 1$ 时, 级数条件收敛.

当 p, q 中有一个小于或等于零时, 由于通项不趋于零 (当 $n \rightarrow \infty$), 故级数发散.

【2694】 $1 + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{7^p} - \frac{1}{4^p} + \dots$.

解 当 $p > 1$ 时, 由于原级数是由绝对收敛的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^p}$ 交换项数重排而得来的, 因此, 它也是绝对收敛的. 下面我们再讨论条件收敛性.

当 $0 < p < 1$ 时, 考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 其中

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{(4n-3)^p} + \frac{1}{(4n-1)^p} - \frac{1}{(2n)^p} = \frac{1}{(4n)^p \left(1 - \frac{3}{4n}\right)^p} + \frac{1}{(4n)^p \left(1 - \frac{1}{4n}\right)^p} - \frac{1}{(2n)^p} \\ &= \frac{1}{(4n)^p} \left[1 + \frac{3p}{4n} + 1 + \frac{p}{4n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] - \frac{1}{(2n)^p} = \frac{1}{2^p (2n)^p} \left[2 + \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] - \frac{1}{(2n)^p} \\ &= \frac{1}{(2n)^p} \left(\frac{1}{2^{p-1}} - 1 \right) + \frac{4p}{(4n)^{p+1}} + O\left(\frac{1}{n^{p+2}}\right). \end{aligned} \quad (1)$$

由第一项组成的级数发散到 $+\infty$, 而由其余各项分别组成的级数均收敛. 因此, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散. 易证原级数与

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 同时收敛或同时发散 (这可用部分和作比较而得), 从而, 当 $0 < p < 1$ 时, 原级数发散.

当 $p = 1$ 时, (1) 式第一项为零, 而由第二项及第三项分别组成的级数显然收敛, 故当 $p = 1$ 时, 原级数收敛, 并且显然不是绝对收敛的, 即原级数条件收敛.

当 $p \leq 0$ 时, 原级数显然发散.

【2695】 $1 + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{1^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{7^p} - \frac{1}{3^p} + \frac{1}{9^p} + \frac{1}{11^p} - \frac{1}{5^p} + \dots$.

解 易证原级数与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 同时收敛或同时发散, 其中

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{(4n-3)^p} + \frac{1}{(4n-1)^p} - \frac{1}{(2n-1)^p} = \frac{1}{2^p (2n)^p} \left[2 + \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] - \frac{1}{(2n)^p} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^p} \\ &= \frac{1}{(2n)^p} \left(\frac{1}{2^{p-1}} - 1 \right) + \frac{1}{2^p} \left(\frac{p}{2^p} - \frac{p}{2} \right) \frac{1}{n^{p+1}} + O\left(\frac{1}{n^{p+2}}\right) \end{aligned} \quad (1)$$

当 $p > 1$ 时, 级数显然绝对收敛.

当 $0 < p < 1$ 时, 由 (1) 式第一项组成的级数发散, 而由 (1) 式第二项及第三项所分别组成的级数均收敛.

因此, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散. 从而当 $0 < p < 1$ 时, 原级数发散.

当 $p = 1$ 时, 原级数条件收敛. 事实上, 此时 (1) 式中第一项及第二项均为零, 而由第三项所组成的级数收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 从而原级数收敛. 但级数

$$1 + \frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{5} + \dots$$

是发散的.

当 $p \leq 0$ 时, 原级数显然发散.

【2696】 $1 - \frac{2}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} - \frac{2}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} - \frac{2}{8^p} + \frac{1}{9^p} + \dots$.

解 当 $p > 1, q > 1$ 时, 记 $\delta = \min(p, q) > 1$. 由于级数

$$1 + \frac{2}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{2}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} + \frac{2}{8^p} + \frac{1}{9^p} + \dots \quad (1)$$

的前 N 项部分和 S_N 有

$$S_N \leq \sum_{k=1}^N \frac{2}{k^p} = 2 \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^p} < +\infty,$$

故 $\{S_N\}$ 单调上升且有界, 从而, $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N$ 存在. 于是, 原级数当 $p > 1, q > 1$ 时绝对收敛.

当 $0 < p = q \leq 1$ 时, 由于级数 (1) 的 S_N 有

$$S_N \geq \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \rightarrow +\infty \quad (\text{当 } N \rightarrow +\infty \text{ 时}),$$

故原级数并不绝对收敛. 但当 $0 < p = q \leq 1$ 时, 可考虑级数 $(1 - \frac{2}{2^p}) + \sum_{k=1}^{\infty} u_k$, 其中

$$\begin{aligned} u_k &= \frac{1}{(3k)^p} + \frac{1}{(3k+1)^p} - \frac{2}{(3k+2)^p} = \frac{1}{(3k)^p} \left[1 - \left(1 + \frac{2}{3k} \right)^{-p} \right] + \frac{1}{(3k+1)^p} \left[1 - \left(1 + \frac{1}{3k+1} \right)^{-p} \right] \\ &= \frac{1}{(3k)^p} \left[\frac{2p}{3k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \right] + \frac{1}{(3k+1)^p} \left[\frac{p}{3k+1} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \right] \\ &= \frac{2p}{(3k)^{p+1}} + \frac{p}{(3k+1)^{p+1}} + O\left(\frac{1}{k^{p+2}}\right) = \frac{3p}{(3k)^{p+1}} + O\left(\frac{1}{k^{p+2}}\right). \end{aligned}$$

因此, 显然 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 收敛. 易证原级数与级数 $(1 - \frac{2}{2^p}) + \sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 同时收敛或同时发散. 因而原级数当 $0 < p = q \leq 1$ 时条件收敛.

当 p, q 中有一个小于或等于零时, 原级数显然发散.

【2697】 证明: 级数

$$(1) \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots, \quad (2) \cos x + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} + \dots$$

在区间 $(0, \pi)$ 内不绝对收敛.

$$\text{证} \quad (1) \left| \frac{\sin nx}{n} \right| \geq \frac{\sin^2 nx}{n} = \frac{1 - \cos 2nx}{2n} = \frac{1}{2n} - \frac{\cos 2nx}{2n}.$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ 发散到 $+\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{2n}$ 收敛 (这是因为 $\frac{1}{2n}$ 单调趋于零, 且 $\sum_{n=1}^N \cos 2nx$ 有界, 故由狄利克雷判别法即获证), 故级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin nx}{n} \right|$$

在 $(0, \pi)$ 内发散. 至于原级数的收敛性是显然的. 因此, 原级数在 $(0, \pi)$ 内仅为条件收敛.

(2) 可用 (1) 的方法证明. 事实上, 由

$$\left| \frac{\cos nx}{n} \right| \geq \frac{\cos^2 nx}{n} = \frac{1}{2n} + \frac{\cos 2nx}{2n}$$

即知级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos nx}{n} \right|$$

在 $(0, \pi)$ 内发散. 至于原级数的收敛性是显然的. 因此, 原级数在 $(0, \pi)$ 内仅为条件收敛.

【2698】 对于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^p}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p} \quad (0 < x < \pi)$$

对全体参数 (p, x) 定出: (1) 绝对收敛域; (2) 非绝对收敛域.

解 当 $p > 1$ 时, 由于

$$\left| \frac{\cos nx}{n^p} \right| \leq \frac{1}{n^p}, \quad \left| \frac{\sin nx}{n^p} \right| \leq \frac{1}{n^p} \quad (0 < x < \pi),$$

且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 收敛, 故这两个级数当 $p > 1$ 时, 对于 $(0, \pi)$ 内任一 x 值均绝对收敛.

当 $0 < p \leq 1$ 时, 由于 $\frac{1}{n^p}$ 单调下降趋于零, 且部分和 $\sum_{n=1}^N \cos nx$ 及 $\sum_{n=1}^N \sin nx$ 均有界 ($0 < x < \pi$), 故由狄利克雷判别法知两级数均收敛, 但绝对值组成的级数均发散, 事实上,

$$\left| \frac{\cos nx}{n^p} \right| \geq \frac{\cos^2 nx}{n^p} = \frac{1}{2n^p} + \frac{\cos 2nx}{2n^p}, \quad \left| \frac{\sin nx}{n^p} \right| \geq \frac{\sin^2 nx}{n^p} = \frac{1}{2n^p} - \frac{\cos 2nx}{2n^p},$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^p}$ 当 $0 < p \leq 1$ 时发散到 $+\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{2n^p}$ 当 $0 < p \leq 1$ 时收敛, 故级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos nx|}{n^p}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin nx|}{n^p}$$

当 $0 < p \leq 1$ 时均发散. 因此, 当 $0 < p \leq 1$ 时, 对于 $(0, \pi)$ 内任一 x 值, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^p}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p}$$

均为条件收敛. 当 $p \leq 0$ 时, 两级数显然发散.

总之, 当 $0 < x < \pi$ 时, 两级数的 (1) 绝对收敛域为 $p > 1$; (2) 条件收敛域为 $0 < p \leq 1$.

【2699】 对于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(1+p)(2+p)\cdots(n+p)}{n! n^q}$$

定出: (1) 绝对收敛域; (2) 条件收敛域.

解 记 $a_n = \frac{(1+p)(2+p)\cdots(n+p)}{n! n^q}$.

为研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 的绝对收敛性, 可考虑 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 其中 $u_n = |(-1)^{n-1} a_n| = a_n$. 由于

$$\begin{aligned} \frac{u_n}{u_{n+1}} &= \frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\frac{n+1}{n+1+p} \right) \left(\frac{n+1}{n} \right)^q = \left(1 - \frac{p}{n+1+p} \right) \left(1 + \frac{1}{n} \right)^q \\ &= \left[1 - \frac{p}{n} + \frac{p(p+1)}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right] \left[1 + \frac{q}{n} + \frac{q(q-1)}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right] = 1 + \frac{q-p}{n} + \Delta_n, \end{aligned}$$

其中

$$\Delta_n = \left[\frac{1}{2} q(q-1) - pq + p(p+1) \right] \frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

故由高斯判别法知: 当 $q > p+1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 从而, 原级数绝对收敛. 当然 $p = -1, -2, \dots$ 时原级数也绝对收敛.

当 $q \leq p+1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 从而, 原级数并不绝对收敛. 但当 $p < q \leq p+1$ 时原级数是条件收敛的.

因为当 n 足够大时, 易见 $u_n > u_{n+1}$, 即 a_n 单调下降. 记 $q = p + \epsilon$, $\epsilon > 0$, 则

$$a_n = \frac{(1+p)(2+p)\cdots(n+p)}{n! n^{p+\epsilon}},$$

取对数, 有

$$\begin{aligned} \ln a_n &= \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{p}{k} \right) - (p+\epsilon) \ln n = \sum_{k=1}^n \frac{p}{k} + \sum_{k=1}^n O\left(\frac{1}{k^2}\right) - (p+\epsilon) \ln n \\ &= p \ln n + pr + A_1 + O\left(\frac{1}{n}\right) - p \ln n - \epsilon \ln n = pr + A_1 + O\left(\frac{1}{n}\right) - \epsilon \ln n \rightarrow -\infty \quad (\text{当 } n \rightarrow +\infty \text{ 时}), \end{aligned}$$

其中 r 及 A_1 为某些常数, 从而知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. 由莱布尼茨判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛. 因此, 当 $p < q \leq p+1$ 时, 原级数条件收敛.

当 $q = p$ 时, 有 $\ln a_n = pr + A_1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow pr + A_1$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时), 也即 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^{pr+A_1} \neq 0$, 原级数发散.

当 $q < p$ 时, 对于足够大的 n 有 $a_n < a_{n+1}$, 可见通项也不趋于零, 故原级数也发散.

总之, (1) 级数的绝对收敛域为 $q > p+1$; (2) 级数的条件收敛域为 $p < q \leq p+1$.

【2700】 研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{m}{n}$ 的收敛性, 其中 $\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}$.

解 记 $a_n = \binom{m}{n}$, 有

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \left| \frac{n+1}{m-n} \right| = \left| \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left[1 + \frac{m}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \right| = 1 + \frac{m+1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

故由高斯判别法知: 当 $m+1 > 1$ 即当 $m > 0$ 时, 级数绝对收敛. 当 $m < 0$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散. 至于当 $m=0$ 时, 级数每一项为零, 因此, 级数显然绝对收敛.

下面我们证明: 当 $-1 < m < 0$ 时, 级数收敛, 从而知级数条件收敛. 事实上, 当 n 足够大之后, 易见 $\sum_{n=n_0}^{\infty} \binom{m}{n}$ 为交错级数. 又因 $-1 < m < 0$, 故 $\left| \frac{m-n}{n+1} \right| < 1$, 它等价于 $|a_{n+1}| < |a_n|$, 这表明级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ 的通项的绝对值是单调减少的. 现在再证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$. 为此, 取对数, 有

$$\begin{aligned} \ln |a_n| &= \ln \left| \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} \right| \\ &= \ln \left| \left(1 - \frac{m+1}{1}\right) \left(1 - \frac{m+1}{2}\right) \cdots \left(1 - \frac{m+1}{n}\right) \right| = \sum_{k=1}^n \ln \left(1 - \frac{m+1}{k}\right). \end{aligned}$$

由于当 $k \rightarrow +\infty$ 时, $\ln \frac{1 - \frac{m+1}{k}}{-\frac{m+1}{k}} \rightarrow 1$, 而 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ 发散到 $+\infty$, 故 $\sum_{k=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{m+1}{k}\right)$ 发散到 $-\infty$, 因此, $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|$

$= 0$. 由莱布尼茨判别法知 $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ 收敛, 从而, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛.

当 $m \leq -1$ 时, 由于级数的通项不趋于零, 故级数发散.

总之, 当 $m \geq 0$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{m}{n}$ 绝对收敛; 当 $-1 < m < 0$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{m}{n}$ 条件收敛.

【2701】 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = 1$, 则可否断定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 也收敛? 研究例子

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad \text{和} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \right].$$

提示 当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 均为正项级数时可断定. 但当它们不一定是正项级数时不能断定, 例如,
 $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}.$

解 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 均为正项级数, 则由 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛可断定 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 也收敛. 但当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 不一定是正项级数时, 则由 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的收敛性不能断定 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 也收敛. 例如, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 是收敛的, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}}{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = 1,$$

但级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \right]$$

却是发散的.事实上,它是由收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 及发散级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 相加而得的,故它是发散的.

【2702】 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为非绝对收敛的级数,

$$P_n = \sum_{i=1}^n \frac{|a_i| + a_i}{2}, \quad N_n = \sum_{i=1}^n \frac{|a_i| - a_i}{2},$$

证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n}{P_n} = 1$.

证 首先注意,非绝对收敛即条件收敛.若级数发散,本命题不一定成立.例如,取 $a_i = 1$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n}{P_n} = 0$;

若 $a_i = 1$ (当 $i = 1 \pmod{2}$ 时) 或 $a_i = -\frac{1}{2}$ (当 $i = 0 \pmod{2}$ 时), 此时将有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n}{P_n} = \frac{1}{2}$, 等等.

当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛时,有

$$\frac{N_n}{P_n} = \frac{\sum_{i=1}^n |a_i| - \sum_{i=1}^n a_i}{\sum_{i=1}^n |a_i| + \sum_{i=1}^n a_i} = \frac{1 - \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{\sum_{i=1}^n |a_i|}}{1 + \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{\sum_{i=1}^n |a_i|}},$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛及 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = +\infty$, 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{\sum_{i=1}^n |a_i|} = 0,$$

从而,即得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n}{P_n} = 1$.

【2703】 证明:对于每一个 $p > 0$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ 的和是在 $\frac{1}{2}$ 与 1 之间.

证 首先,由于此级数的前 $2n$ 项的和

$$S_{2n} = \left(1 - \frac{1}{2^p}\right) + \left(\frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p}\right) + \cdots + \left[\frac{1}{(2n-1)^p} - \frac{1}{(2n)^p}\right]$$

中的每一个括号内的数大于零,故 $\{S_{2n}\}$ 是一个单调递增的数列. 又因

$$S_{2n} = 1 - \left(\frac{1}{2^p} - \frac{1}{3^p}\right) - \left(\frac{1}{4^p} - \frac{1}{5^p}\right) - \cdots - \left[\frac{1}{(2n-2)^p} - \frac{1}{(2n-1)^p}\right] - \frac{1}{(2n)^p} < 1,$$

故 $\{S_{2n}\}$ 是以 1 为上界的数列. 从而知 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}$ 存在且不超过 1.

由于此级数当 $p > 0$ 时是收敛的,故对于数列 $\{S_{2n}\}$, 它的极限与级数的和相等,即

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} \leq 1 \quad (p > 0)$$

(对于 $p = 1$, 此级数的和为 $\ln 2$).

其次,我们证明此和不小于 $\frac{1}{2}$, 仍考虑前 $2n$ 项的部分和 \bar{S}_{2n} , 则有 $S_{2n} = 1 - \frac{1}{2^p} + \bar{S}_{2n}$, 其中

$$\bar{S}_{2n} = \sum_{k=2}^n \left[\frac{1}{(2k-1)^p} - \frac{1}{(2k)^p} \right] = \sum_{k=2}^n \frac{p}{(2k-1+\theta_k)^{p+1}},$$

这里 $0 < \theta_k < 1$ ($k = 2, 3, \dots, n$). 由于 $p > 0$ 以及

$$\frac{1}{(2k-1+\theta_k)^{p+1}} \geq \frac{1}{(2k)^{p+1}} \quad (k=2,3,\dots),$$

$$\begin{aligned} \text{即得} \quad \tilde{S}_{2n} &\geq \sum_{k=2}^n \frac{p}{(2k)^{p+1}} = \frac{p}{2^{p+1}} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^{p+1}} \geq \frac{p}{2^{p+1}} \left[\int_2^n \frac{dx}{x^{p+1}} + \frac{1}{n^{p+1}} \right] = \frac{p}{2^{p+1}} \left[-\frac{1}{px^p} \Big|_2^n + \frac{1}{n^{p+1}} \right] \\ &= \frac{1}{2^{2p+1}} - \frac{1}{2^{p+1}} \cdot \frac{1}{n^p} + \frac{p}{2^{p+1}} \cdot \frac{1}{n^{p+1}} = \frac{1}{2^{2p+1}} - \frac{1}{2^{p+1}} \cdot \frac{1}{n^p} \left(1 - \frac{p}{n} \right) = \frac{1}{2^{2p+1}} + \Delta_n, \end{aligned}$$

此处

$$\Delta_n = \frac{-1}{2^{p+1}} \cdot \frac{1}{n^p} \left(1 - \frac{p}{n} \right) = O\left(\frac{1}{n^p}\right) \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时}).$$

于是,对任给的 $\epsilon > 0$, 存在正整数 N_0 , 使当 $n \geq N_0$ 时, 有 $|\Delta_n| < \epsilon$. 这时有

$$S_{2n} = 1 - \frac{1}{2^p} + \tilde{S}_{2n} \geq 1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^{2p+1}} - \epsilon.$$

但当 $p > 0$ 时, $1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^{2p+1}} > \frac{1}{2}$, 这是因为 $2^p + \frac{1}{2^p} > 2$, 故得

$$1 + \frac{1}{2^{2p}} > \frac{2}{2^p} \quad \text{或} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{2p+1}} > \frac{1}{2^p}.$$

从而, $S_{2n} > \frac{1}{2} - \epsilon$, 故收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ 的和

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} \geq \frac{1}{2} - \epsilon.$$

由 $\epsilon > 0$ 的任意性, 即得 $S \geq \frac{1}{2}$. 综上所述, $\frac{1}{2} \leq S \leq 1$.

【2704】 证明: 若把级数

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

的各项重新安排, 使依次 p 个正项的一组与依次 q 个负项的一组相交替, 则新级数的和为 $\ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{p}{q}$.

证 按题意, 我们要证

$$1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2p-1} - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{2q} + \frac{1}{2p+1} + \dots + \frac{1}{4p-1} - \frac{1}{2q+2} - \dots = \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{p}{q}. \quad (1)$$

首先, 我们有

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \ln n + C + \epsilon_n,$$

其中 C 为欧拉常数, 而 ϵ_n 为无穷小量, 由此即得

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2m} = \frac{1}{2} H_m = \frac{1}{2} \ln m + \frac{1}{2} C + \frac{1}{2} \epsilon_m,$$

$$1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2k-1} = H_{2k} - \frac{1}{2} H_k = \ln 2 + \frac{1}{2} \ln k + \frac{C}{2} + \epsilon_{2k} - \frac{1}{2} \epsilon_k.$$

于是, 若把级数(1)的 p 项或 q 项的数串组合起来, 考虑

$$\begin{aligned} S_{2n} &= 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2p-1} - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{2q} + \frac{1}{2p+1} + \dots + \frac{1}{2(n-1)q} + \frac{1}{2(n-1)p+1} + \dots + \frac{1}{2np-1} \\ &= \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{2np}{2(n-1)q} + a_n = \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{p}{q} + a'_n, \end{aligned}$$

其中 $a_n \rightarrow 0$, $a'_n \rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$); 又因 $S_{2n+1} = S_{2n} + \beta_n$, 其中 $\beta_n \rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时), 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \frac{1}{2} \ln \frac{p}{q} + \ln 2.$$

从而, 级数(1)的和为 $\ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{p}{q}$.

【2705】 证明: 若改变调和级数

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

部分项的符号,使得 p 个正项之后跟随着 q 个负项($p \neq q$),但不变更原来的顺序,则此级数仍是发散的,仅当 $p=q$ 时得到收敛级数.

证 若 $p \neq q$,不妨设 $p > q$,记

$$a_k = \frac{1}{(p+q)k+1} + \dots + \frac{1}{(p+q)k+p} - \frac{1}{(p+q)k+p+1} - \dots - \frac{1}{(p+q)k+p+q}.$$

由于其中正项的项数比负项的项数为多,且所有正项中任一项均比任一负值的绝对值为大,故有

$$a_k > \frac{1}{(p+q)k+1} > 0 \quad (k=1, 2, \dots).$$

但 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(p+q)k+1}$ 发散,故 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ 发散.从而比较一下即知所得级数发散(若 $p < q$ 同理可证).

若 $p=q$,记 $b_k = \frac{1}{kp+1} + \frac{1}{kp+2} + \dots + \frac{1}{kp+p} \quad (k=0, 1, 2, \dots).$

考虑 $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k b_k$. 显然 $b_k > 0$, $b_k > b_{k+1}$ ($k=0, 1, 2, \dots$), 且 $b_k \rightarrow 0$ (当 $k \rightarrow \infty$ 时), 故由莱布尼茨判别法知级数

$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k b_k$ 收敛. 易见所得级数与级数 $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k b_k$ 同时收敛或同时发散. 因此, 当 $p=q$ 时, 所得级数收敛.

§ 3. 级数的运算

级数的和与积 我们定义:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n);$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n,$$

式中 $c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1$.

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 二者收敛, 则等式(1)并非仅有形式上的意义; 至于等式(2), 则要求级数

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 二者收敛, 并且其中最少有一个是绝对收敛的.

【2706】 若两个级数, (1)一个收敛, 而另一个发散; (2)两个都发散, 则关于这两个级数的和可下何种断言?

提示 (1)一定发散. (2)可以收敛, 也可以发散. 例如, $a_n = (-1)^n$, $b_n = (-1)^{n+1}$ 及 $a_n = b_n = \frac{1}{n}$.

解 (1)一定发散. 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散, 如果其和 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛, 则将有

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

也收敛, 得出矛盾. 于是, 此时两级数的和一定发散.

(2)可以收敛, 也可以发散. 例如:

(i) 设 $a_n = (-1)^n$, $b_n = (-1)^{n+1}$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 均发散, 但 $c_n = 0$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛;

(ii) 设 $a_n = b_n = \frac{1}{n}$, 则 $c_n = \frac{2}{n}$. 显见, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 均发散.

【2707】 求二级数的和: $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{3^n} + \frac{(-1)^n}{n^3} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{(-1)^{n+1}}{n^3} \right]$.

提示 显然收敛, 且和为 $\frac{2}{3}$.

解 两级数显然是收敛的. 因此, 它们的和也是收敛的. 逐项相加, 即可求得两级数的和为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3^{n+1}} = \frac{4}{3^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{2}{3}.$$

求下列级数的和:

【2708】 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{3^n} \right]$.

解 此级数是由两收敛级数逐项相加而得的, 因此, 它是收敛的, 且其和为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} + \left(-\frac{1}{3}\right) \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{3}{4}.$$

【2709】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{2^n}$.

解题思路 级数显然绝对收敛, 且其和为

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{2^n} - 1 = \sum_{n \in A_1} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{2^n} + \sum_{n \in A_2} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{2^n} + \sum_{n \in A_3} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{2^n} - 1,$$

其中: $A_1 = \{n | n=3k, k=0, 1, 2, \dots\}$,

$A_2 = \{n | n=3k+1, k=0, 1, 2, \dots\}$,

$A_3 = \{n | n=3k+2, k=0, 1, 2, \dots\}$.

以上这样计算是合理的.

解 原级数显然绝对收敛, 记其和为 S , 则有

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{2^n} - 1.$$

设将 $n=0, 1, 2, \dots$ 分成三类:

$A_1 = \{n | n=3k, k=0, 1, 2, \dots\}$,

$A_2 = \{n | n=3k+1, k=0, 1, 2, \dots\}$,

$A_3 = \{n | n=3k+2, k=0, 1, 2, \dots\}$,

$$\begin{aligned} \text{则 } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{2^n} &= \sum_{n \in A_1} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{2^n} + \sum_{n \in A_2} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{2^n} + \sum_{n \in A_3} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{2^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{3k}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{2\pi}{3}}{2^{3k+1}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(\pi + \frac{\pi}{3})}{2^{3k+2}} \\ &= \left[1 + \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi}{3} + \frac{1}{2^2} \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) \right] \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^3}\right)^k = \left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) \frac{1}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{5}{7}, \end{aligned}$$

以上计算是合理的, 因为上述三个级数均绝对收敛, 故其和为 $\frac{5}{7}$. 从而, 原级数的和为

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{2^n} - 1 = \frac{5}{7} - 1 = -\frac{2}{7}.$$

【2710】⁺ $\sum_{n=0}^{\infty} x^{\frac{n}{2}} y^{\frac{n+1}{2}} \quad (|xy| < 1).$

解题思路 仿 2709 题, 有

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} y^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} = \sum_{n \in A_1} x^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} y^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} + \sum_{n \in A_2} x^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} y^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor},$$

其中: $A_1 = \{n | n=2k, k=0, 1, 2, \dots\}$, $A_2 = \{n | n=2k+1, k=0, 1, 2, \dots\}$.

解 设将 $n=0, 1, 2, \dots$ 分成二类:

$$A_1 = \{n | n=2k, k=0, 1, 2, \dots\}, \quad A_2 = \{n | n=2k+1, k=0, 1, 2, \dots\},$$

则

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} y^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} = \sum_{n \in A_1} x^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} y^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} + \sum_{n \in A_2} x^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} y^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k y^k + \sum_{k=0}^{\infty} x^k y^{k+1}.$$

显然上式右端两级数当 $|xy| < 1$ 时绝对收敛, 故原级数收敛, 且其和为

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} y^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} = \sum_{k=0}^{\infty} (xy)^k + y \sum_{k=0}^{\infty} (xy)^k = (1+y) \sum_{k=0}^{\infty} (xy)^k = \frac{1+y}{1-xy}.$$

【2711】 证明: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1$.

证 此两级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 及 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ 均绝对收敛, 其中

$$a_n = \frac{1}{n!}, \quad b_n = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

故可写成

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n,$$

其中

$$c_n = \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i} = \sum_{i=0}^n \left[\frac{1}{i!} \cdot \frac{(-1)^{n-i}}{(n-i)!} \right] = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^n \left[(-1)^{n-i} \cdot \frac{n!}{i!(n-i)!} \right] = \frac{1}{n!} (1-1)^n = 0 \quad (n=1, 2, \dots).$$

从而知

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n = 1.$$

当然, 由 e 的定义知

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e \quad \text{及} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = e^{-1}.$$

从而, 就可以直接计算得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = e \cdot e^{-1} = 1.$$

【2712】 证明: $\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n \right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)q^n \quad (|q| < 1)$.

证 由 $|q| < 1$ 知级数 $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ 绝对收敛, 故可写成 $\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n \right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$, 其中

$$c_n = \sum_{i=0}^n (q^i \cdot q^{n-i}) = q^n \sum_{i=0}^n 1 = (n+1)q^n \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

因此, $\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n \right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)q^n$.

【2713】 证明: 收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ 的平方是发散级数.

证 如果此级数的平方收敛, 则可写其积为 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, 即 $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} \right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$, 其中

$$c_n = \frac{1}{1} \cdot \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{(-1)^n}{\sqrt{n-1}} + \cdots + \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}} \cdot \frac{(-1)^{n-k+2}}{\sqrt{n-k+1}} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{1}$$

$$= (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{1 \cdot \sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{n-1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k} \cdot \sqrt{n-k+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n} \cdot 1} \right).$$

由于括号中的每一项都大于 $\frac{1}{n^{1/2}}$, 故 $|c_n| > 1$, 这与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛相矛盾. 因此, 级数 $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} \right)^2$ 发散.

*) 只要证 $k(n-k+1) < n^2$ 或 $n^2 - nk + k^2 - k > 0$. 由于

$$n^2 - nk + k^2 - k = \left(n - \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{3k^2 - 4k}{4},$$

故只要证 $3k^2 - 4k > 0$. 但 $3k^2 - 4k = 3k(k - \frac{4}{3})$, 可见对于 $k = 2, 3, \cdots$ 上式成立. 至于当 $k = 1$ 时, 显然有

$1 \cdot (n-1+1) = n \leq n^2$ 或 $\frac{1}{1 \cdot \sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$. 因而不等式 $k(n-k+1) < n^2$ 成立.

【2714】 证明: 下面二级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^a} \quad (a > 0) \quad \text{及} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^b} \quad (b > 0)$$

的积当 $a + b > 1$ 时是收敛级数, 而当 $a + b < 1$ 时是发散级数.

证 记

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^b} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \quad (a > 0, b > 0).$$

按乘法法则应有

$$c_n = \sum_{i=1}^n \left[\frac{(-1)^{i-1}}{i^a} \cdot \frac{(-1)^{n-i+1}}{(n-i+1)^b} \right] = (-1)^{n-1} \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i+j=n+1}} \frac{1}{i^a j^b} = (-1)^{n-1} d_n,$$

其中 $d_n = \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{i^a (n-i+1)^b} \quad (n = 1, 2, \cdots)$.

(1) 当 $a + b \leq 1$ 时, 有

$$d_n \geq \sum_{1 \leq i \leq \frac{n}{2}} \frac{1}{i^a (n-i+1)^b} \geq \frac{1}{\left(\frac{n}{2}\right)^a} \sum_{1 \leq i \leq \frac{n}{2}} \frac{1}{(n-i+1)^b} = \frac{1}{\left(\frac{n}{2}\right)^a} \sum_{\frac{n}{2} < j \leq n} \frac{1}{j^b} \geq \frac{1}{\left(\frac{n}{2}\right)^a} \int_{\frac{n}{2}}^n \frac{dt}{t^b}$$

$$= 2^a \cdot \frac{1}{1-\beta} \left(1 - \frac{1}{2^{1-\beta}}\right) n^{1-(a+\beta)}.$$

于是, 当 $a + b < 1$ 时, $d_n \rightarrow \infty$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时); 当 $a + b = 1$ 时, $d_n \geq 2^a \cdot \frac{1}{1-\beta} \left(1 - \frac{1}{2^{1-\beta}}\right) > 0$, 即当 $a + b \leq 1$ 时, d_n

不趋于零 (当 $n \rightarrow \infty$ 时), 从而知 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} d_n$ 为发散级数.

(2) 当 $a + b > 1$ 时, 有

$$d_n = \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{i^a (n-i+1)^b} = \sum_{1 \leq i \leq \frac{n}{2}} \frac{1}{i^a (n-i+1)^b} + \sum_{\frac{n}{2} < i \leq n} \frac{1}{i^a (n-i+1)^b} = \sum_1 + \sum_2,$$

$$\text{其中 } \sum_1 = \sum_{1 \leq i \leq \frac{n}{2}} \frac{1}{i^a (n-i+1)^b} \leq \frac{1}{\left(\frac{n}{2} + 1\right)^b} \sum_{1 \leq i \leq \frac{n}{2}} \frac{1}{i^a} \leq \frac{1}{\left(\frac{n}{2} + 1\right)^b} \left(1 + \int_1^{\frac{n}{2}} \frac{dt}{t^a}\right)$$

$$= O\left(\frac{1}{n^b}\right) + O\left(n^{-b} \cdot \int_1^{\frac{n}{2}} \frac{dt}{t^a}\right) = O(n^{-b}) + O(n^{1-(a+\beta)}),$$

同理有 $\sum_2 \leq O(n^{-a}) + O(n^{1-(a+\beta)})$.

由于 $a > 0, b > 0, 1 - (a + b) < 0$, 故有 d_n 趋于零:

$$d_n \leq O(n^{-a}) + O(n^{-b}) + O(n^{1-(a+\beta)}) \rightarrow 0 \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时}).$$

记 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 的部分和为 $S_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n$. 考虑原两级数的部分和

$$A_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k^a}, \quad B_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k^\beta}.$$

今考察下列差数

$$\begin{aligned} \Delta_n &= A_n B_n - S_n = \left(\sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i-1}}{i^a} \right) \left(\sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j-1}}{j^\beta} \right) - S_n \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i-1}}{i^a} \right) \left(\sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j-1}}{j^\beta} \right) - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{\substack{1 \leq i \leq k \\ i+j=k+1}} \frac{1}{i^a j^\beta} \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \frac{(-1)^i}{i^a} \right) \left(\sum_{j=1}^n \frac{(-1)^j}{j^\beta} \right) - \sum_{\substack{2 \leq i+j \leq n+1 \\ 1 \leq i, j \leq n}} \left(\frac{(-1)^i}{i^a} \right) \left(\frac{(-1)^j}{j^\beta} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{2n-1} \sum_{\substack{1 \leq i \leq i \\ i+j=n+1}} \frac{(-1)^{i+1}}{i^a j^\beta} - \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{1 \leq i \leq k \\ i+j=k+1}} \frac{(-1)^{k-1}}{i^a j^\beta} = \sum_{s=n+1}^{2n-1} (-1)^{s-1} \sum_{\substack{1 \leq i \leq s \\ i+j=s+1}} \frac{1}{i^a j^\beta}. \end{aligned}$$

为估计上述差数各项,可看下列乘法表(图 5.1). $A_n B_n$ 表示下列乘法表正方形各交点上乘积的全部和,而 S_n 表示下列乘法表对角线左上角各交点上乘积项(圆点号处的乘积项)的总和.于是,剩下的差数实指下列乘法表对角线的右下部分各交点处乘积项(打×号处的乘积项)的总和.

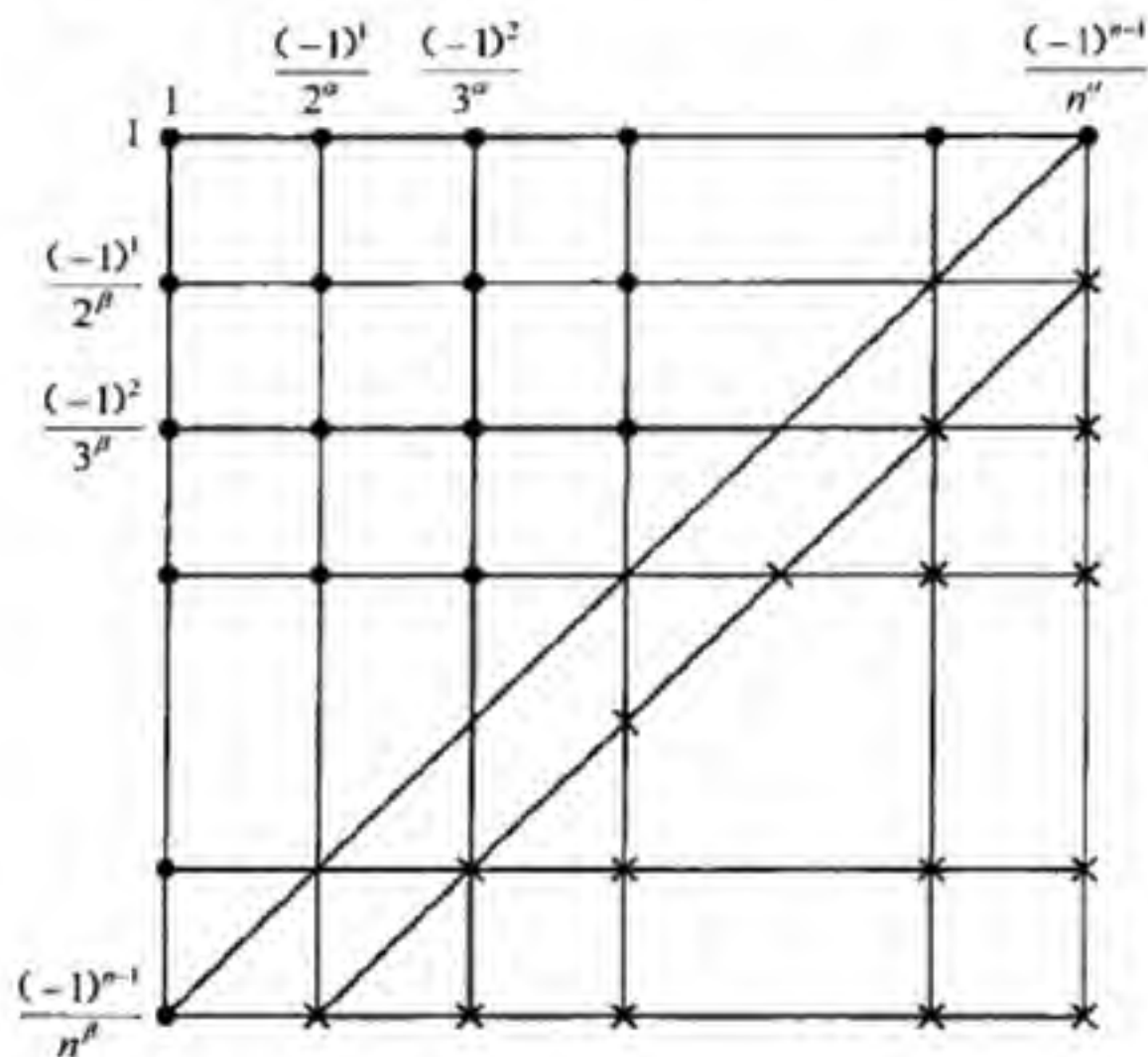


图 5.1

于是,有

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \frac{(-1)^{n-1}}{n^\beta} \left[\frac{(-1)^1}{2^a} + \frac{(-1)^2}{3^a} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^a} \right] + \frac{(-1)^{n-2}}{(n-1)^\beta} \left[\frac{(-1)^2}{3^a} + \frac{(-1)^3}{4^a} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^a} \right] \\ &\quad + \dots + \frac{(-1)^1}{2^\beta} \left[\frac{(-1)^{n-1}}{n^a} \right] \\ &= (-1)^n \left\{ \frac{1}{n^\beta} \left(\frac{1}{2^a} - \frac{1}{3^a} + \dots + \frac{(-1)^n}{n^a} \right) + \frac{1}{(n-1)^\beta} \left(\frac{1}{3^a} - \frac{1}{4^a} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^a} \right) + \dots + \frac{1}{2^\beta} \left(\frac{1}{n^a} \right) \right\}. \end{aligned}$$

因此,得

$$\begin{aligned} |\Delta_n| &= \frac{1}{n^\beta} \left(\frac{1}{2^a} - \frac{1}{3^a} + \dots + \frac{(-1)^n}{n^a} \right) + \frac{1}{(n-1)^\beta} \left(\frac{1}{3^a} - \frac{1}{4^a} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^a} \right) + \dots + \frac{1}{2^\beta} \left(\frac{1}{n^a} \right) \\ &\leq \frac{1}{n^\beta} \cdot \frac{1}{2^a} + \frac{1}{(n-1)^\beta} \cdot \frac{1}{3^a} + \dots + \frac{1}{2^\beta} \cdot \frac{1}{n^a} \\ &= \sum_{\substack{i+j=n-2 \\ 2 \leq i, j \leq n}} \frac{1}{j^\beta i^a} \leq \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n+1 \\ i+j=n-2}} \frac{1}{i^a j^\beta} = d^{n+1}. \end{aligned}$$

由前已证: 当 $\alpha + \beta > 1$ 时, $d_n \rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时), 故有 $\Delta_n \rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时). 于是,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (A_n B_n - \Delta_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} B_n = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i^\alpha} \right) \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j^\beta} \right),$$

其中右端两级数的收敛性是由 $\alpha > 0, \beta > 0$, 按莱布尼茨判别法获得的. 于是, 当 $\alpha + \beta > 1$ 时, 级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} (\alpha > 0)$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\beta} (\beta > 0)$ 的积 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 为收敛级数.

【2715】 验证下面二发散级数

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n \quad \text{和} \quad 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

的积是绝对收敛级数.

证 记 $1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n,$

其中

$$u_1 = 1, u_2 = -\frac{3}{2}, u_3 = -\left(\frac{3}{2}\right)^2, \dots, u_m = -\left(\frac{3}{2}\right)^{m-1} \quad (m=2, 3, \dots),$$

$$v_1 = 1, v_2 = 2 + \frac{1}{2^2}, v_3 = \frac{3}{2} \left(2^2 + \frac{1}{2^3}\right), \dots, v_m = \left(\frac{3}{2}\right)^{m-2} \left(2^{m-1} + \frac{1}{2^m}\right) \quad (m=2, 3, \dots).$$

因此 $c_1 = u_1 v_1 = 1$. 一般地, 在 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 中, 按乘积定义有

$$\begin{aligned} c_n &= u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \dots + u_{n-1} v_2 + u_n v_1 \\ &= \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} \left(2^{n-1} + \frac{1}{2^n}\right) + \left(-\frac{3}{2}\right) \left(\frac{3}{2}\right)^{n-3} \left(2^{n-2} + \frac{1}{2^{n-1}}\right) + \dots + \left[-\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\right] \left(2 + \frac{1}{2^2}\right) \\ &\quad + \left[-\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\right] \\ &= \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} \left[(2^{n-1} - 2^{n-2} - 2^{n-3} - \dots - 2 - 2^0) + \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}} - \dots - \frac{1}{2}\right) \right] \\ &= \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} \left[\left(2^{n-1} - \frac{2^{n-1}-1}{2-1}\right) + \left(\frac{1}{2^n} - \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}\right) \right] \\ &= \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} \cdot \frac{3}{2^n} = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}, \end{aligned}$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ 绝对收敛.

§ 4. 函数项级数

1° 收敛域 使函数项级数

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (1)$$

收敛的 x 值的集合 X 叫做此级数的收敛域, 而函数

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n u_i(x) \quad (x \in X)$$

称为级数的和.

2° 一致收敛性 对于函数序列

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots \quad (1')$$

若: 1) 存在极限函数

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad (x \in X);$$

2) 对于任何的数 $\epsilon > 0$, 可以确定 $N = N(\epsilon)$, 使得当 $n > N$ 和 $x \in X$ 时,

$$|f(x) - f_n(x)| < \epsilon$$

成立, 则称此函数序列在集合 X 上一致收敛.

当序列 (1') 一致收敛于 $f(x)$ 时, 我们使用记号 $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$.

若函数项级数 (1) 的部分和序列:

$$S_n(x) = \sum_{i=1}^n u_i(x) \quad (n=1, 2, \dots)$$

在集合 X 上一致收敛, 则称级数 (1) 在此集合上一致收敛.

3° 柯西准则 级数 (1) 在集合 X 上一致收敛的充分必要条件为: 对于每一个 $\epsilon > 0$, 都存在数 $N = N(\epsilon)$, 使得当 $n > N$ 和 $p > 0$ 时, 不等式

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{i=n+1}^{n+p} u_i(x) \right| < \epsilon$$

对一切 $x \in X$ 都成立.

4° 魏尔斯特拉斯判别法 对于级数 (1), 若存在收敛的数项级数

$$c_1 + c_2 + \dots + c_n + \dots, \quad (2)$$

使得对于 $x \in X$ 下列不等式都成立:

$$|u_n(x)| \leq c_n \quad (n=1, 2, \dots),$$

则级数 (1) 在集合 X 上绝对并一致收敛.

5° 阿贝尔判别法 若: 1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在集合 X 上一致收敛; 2) 函数 $b_n(x) (n=1, 2, \dots)$ 全体是有界的并对每一个 x 组成一单调序列, 则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x) \quad (3)$$

在集合 X 上一致收敛.

6° 狄利克雷判别法 若: 1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 的部分和全体是有界的; 2) 序列 $b_n(x) (n=1, 2, \dots)$ 对于每一个 x 都是单调的, 并且当 $n \rightarrow \infty$ 时在 X 上一致地趋于零, 则级数 (3) 在集合 X 上一致收敛.

7° 函数项级数的性质 1) 以连续函数为项的一致收敛级数的和是连续函数.

2) 若函数项级数 (1) 在每一个区间 $[a, \beta] \subset (a, b)$ 上一致收敛且有有限的极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = A_n (n=1, 2, \dots)$, 则: I) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 收敛, II) 成立等式

$$\lim_{x \rightarrow a} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\lim_{x \rightarrow a} u_n(x) \right].$$

3) 若收敛级数 (1) 的各项当 $a < x < b$ 时皆连续可微, 并且导数的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ 在区间 (a, b) 内一致收敛, 则

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right]' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x).$$

4) 若级数 (1) 的各项连续, 并且此级数在有限区间 (a, b) 内一致收敛, 则

$$\int_a^b \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right\} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx. \quad (4)$$

一般说来, 若当 $n \rightarrow \infty$ 时 $\int_a^b R_n(x) dx \rightarrow 0$, 这里 $R_n(x) = \sum_{i=n+1}^{\infty} u_i(x)$, 则公式 (4) 成立. 最后这个条件也适合于积分限是无穷大的情况.

定出下列函数项级数的绝对收敛域和条件收敛域.

【2716】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}.$

提示 令 $y = \frac{1}{x}.$

解 令 $\frac{1}{x} = y$, 则有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n} = \sum_{n=1}^{\infty} n y^n.$$

显然上式右端级数的收敛半径为 1. 因此, 仅当 $|y| = \left| \frac{1}{x} \right| < 1$ 即 $|x| > 1$ 时, 原级数绝对收敛.

【2717】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n.$

解 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^n}{2n-1}}{\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}} \right| = 1$, 故仅当 $\left| \frac{1-x}{1+x} \right| < 1$ 即 $(1-x)^2 < (1+x)^2$ 或 $x > 0$ 时, 级数绝对收敛.

当 $x=0$ 时, 原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$, 显见它为条件收敛, 当 $x < 0$ 时, 原级数通项不趋于零, 故发散.

【2718】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{2x+1} \right)^n.$

提示 仿 2717 题的解法.

解 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{n+1}}{\frac{n+1}{n+2}} = 1$, 故仅当 $\left| \frac{x}{2x+1} \right| < 1$ 即 $x^2 < 4x^2 + 4x + 1$ 或

$$(3x+1)(x+1) > 0 \quad (1)$$

时, 级数绝对收敛. 解不等式(1), 得

$$x > -\frac{1}{3} \quad \text{或} \quad x < -1.$$

即为所求的绝对收敛域. 当 $x = -\frac{1}{3}$ 或 $x = -1$ 时, 原级数通项不趋于零, 故发散.

【2719】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)^n.$

解题思路 仿 2717 题, 仅当 $\left| \frac{2x}{1+x^2} \right| < 1$ 或 $|x| \neq 1$ 时, 级数绝对收敛.

当 $x = -1$ 时, 利用 2689 题的结果. 当 $x = 1$ 时, 仍利用同题的结果.

解 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}}{\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+2}{2n+1} = 1,$$

故仅当 $\left| \frac{2x}{1+x^2} \right| < 1$ 时, 级数绝对收敛. 解此不等式:

$$4x^2 < 1 + 2x^2 + x^4, \quad (x^2 - 1)^2 > 0,$$

即 $|x| \neq 1$. 于是, 当 $|x| \neq 1$ 时, 级数绝对收敛.

当 $x = -1$ 时, 原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$, 由 2689 题的结果知它是条件收敛的.

当 $x = 1$ 时, 原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$, 仍由同题的结果知它是发散的.

【2720】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 3^{2n}}{2^n} x^n (1-x)^n.$

解 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n \cdot 3^{2n}}{2^n}}{\frac{(n+1)3^{2n+2}}{2^{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{3^2(n+1)} = \frac{2}{9},$$

故仅当 $|x(1-x)| < \frac{2}{9}$ 时, 级数绝对收敛. 解此不等式:

$$-\frac{2}{9} < x(1-x) < \frac{2}{9}.$$

于是, x 的值应为 $x^2 - x - \frac{2}{9} < 0$ 及 $x^2 - x + \frac{2}{9} > 0$ 的公共部分, 也即 $-\frac{\sqrt{17}-3}{6} < x < \frac{3+\sqrt{17}}{6}$ 及 $x > \frac{2}{3}$

或 $x < \frac{1}{3}$ 的公共部分, 合并得

$$-\frac{\sqrt{17}-3}{6} < x < \frac{1}{3} \quad \text{及} \quad \frac{2}{3} < x < \frac{\sqrt{17}+3}{6},$$

此即级数的绝对收敛域.

当在此二区间的端点时, 级数显然发散.

【2721】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \sin^n x}{n^2}.$

解 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^n}{n^2}}{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{2},$$

故仅当 $|\sin x| < \frac{1}{2}$ 时, 级数绝对收敛. 解之, 得

$$|x - k\pi| < \frac{\pi}{6} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

当 $|x - k\pi| = \frac{\pi}{6}$ 时, 由绝对值组成的级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, 它是收敛的.

因此, 当 $|x - k\pi| \leq \frac{\pi}{6}$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时, 级数绝对收敛.

【2722】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)^p}.$

解 当 $p > 1$ 及 $x \neq k$ ($k=-1, -2, \dots$) 时, 级数显然绝对收敛.

当 $0 < p \leq 1$ 及 $x \neq k$ ($k=-1, -2, \dots$) 时, 级数条件收敛.

当 $p \leq 0$ 时, 级数发散.

【2723】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p \sin nx}{1+n^q} \quad (q > 0; 0 < x < \pi).$

解 由于

$$\frac{|\sin nx|}{2n^{q-p}} \leq \left| \frac{n^p \sin nx}{1+n^q} \right| \leq \frac{1}{n^{q-p}},$$

故当 $q-p > 1$ 即 $q > p+1$ 时, 级数绝对收敛; 而当 $q \leq p+1$ 时, 由绝对值组成的级数发散 (理由可参看 2698 题的题解).

当 $p < q \leq p+1$ 时, 由于对 $0 < x < \pi$ 内任一固定的 x , $\sum_{k=1}^{\infty} \sin kx$ 有界, 且 $\frac{n^p}{1+n^q} \sim \frac{1}{n^{q-p}} \rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时),

故级数收敛.

当 $q \leq p$ 时, 级数显然发散.

总之, 当 $q > p+1$ 时, 级数绝对收敛; 而当 $p < q \leq p+1$ 时, 级数条件收敛.

【2724】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$ (兰伯特级数).

解 考虑级数 (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$ 与 (2) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$.

当 $|x| < 1$ 时, 级数 (2) 绝对收敛. 根据阿贝尔判别法, 以单调递减且有下界的因子 $\frac{1}{1-x^{2n}}$ 乘此级数的对应项所得的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^{2n}} \quad (3)$$

也收敛, 且为绝对收敛.

同理, 再以单调递减且有界的因子 x^n 乘级数 (3) 的对应项所得的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{1-x^{2n}}$ 仍然收敛, 且为绝对收敛. 由于

$$\frac{x^n}{1-x^n} = \frac{x^n}{1-x^{2n}} + \frac{x^{2n}}{1-x^{2n}},$$

故原级数当 $|x| < 1$ 时绝对收敛.

当 $|x| = 1$ 时, 级数 (1) 显然无意义.

当 $|x| > 1$ 时, 级数 (2) 显然发散. 下证级数 (1) 也发散. 若不然, 当 $|x| > 1$ 时, 由级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n}$$

收敛, 再根据阿贝尔判别法, 我们就会推出级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n}$ 也收敛. 从而会得出

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n} - \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} 1$$

也收敛, 这是错误的. 因此, 当 $|x| > 1$ 时, 级数 (1) 发散.

【2725】 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x(x+n)}{n} \right]^n$.

解 记 $a_n = \left[\frac{x(x+n)}{n} \right]^n = x^n \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n$, 则当 $|x| > 1$ 时, 显然 $a_n \rightarrow +\infty$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时), 故级数发散. 当 $|x| = 1$ 时, $|a_n| \rightarrow e^{\pm 1} \neq 0$ (当 $n \rightarrow \infty, x = \pm 1$ 时), 故级数也发散. 当 $|x| < 1$ 时, 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(|x| \cdot \left| 1 + \frac{x}{n} \right| \right) = |x| < 1,$$

故级数绝对收敛.

【2726】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$.

解 记 $a_n = \frac{x^n}{1+x^{2n}}$, 则当 $|x| < 1$ 时, 有 $|a_n| \leq |x|^n$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} |x|^n$ 收敛, 故当 $|x| < 1$ 时, 原级数绝对收敛.

当 $|x| = 1$ 时, $|a_n| = \frac{1}{2}$ 它不趋于零, 故原级数发散.

当 $|x| > 1$ 时, 原级数可写为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^{2n}}$. 由于 $\left|\frac{1}{x}\right| < 1$, 再根据上面的讨论, 故原级数绝对收敛.

总之,当 $|x| \neq 1$ 时,原级数绝对收敛.

【2727】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}.$

解 记 $a_n = \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}$, 则当 $|x| < 1$ 时,有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{|1+x^{n+1}|} = |x| < 1,$$

故级数绝对收敛.

当 $|x| > 1$ 时,级数可写为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right)}, \quad (1)$$

其中级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ 当 $|x| > 1$ 即 $\left|\frac{1}{x}\right| < 1$ 时绝对收敛. 与 $|x| < 1$ 的情况一样,得知级数(1)当 $|x| > 1$ 时绝对收敛.

当 $x = -1$ 时,通项无意义. 但当 $x = 1$ 时,原级数的通项 $a_n = \frac{1}{2^n}$, 显然级数收敛.

总之,当 $x \neq -1$ 时,原级数绝对收敛.

【2728】 $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx}.$

解 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)e^{-(n+1)x}}{n e^{-nx}} = e^{-x},$$

故当 $x > 0$ 时, $e^{-x} < 1$, 级数绝对收敛, 而当 $x = 0$ 时, 级数可写为 $\sum_{n=1}^{\infty} n$, 显然发散. 又当 $x < 0$ 时, $e^{-x} > 1$, 级数发散.

【2729】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \frac{1}{1+a^{2n}x^2}.$

解 记 $a_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \frac{1}{1+a^{2n}x^2}$, 则当 $x = 0$ 时, $a_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} > \frac{1}{\sqrt[n]{n^n}} = \frac{1}{n}$, 故原级数发散.

当 $x \neq 0$ 时:

(1) 当 $|a| > 1$ 时, 有 $0 < a_n < \frac{1}{a^{2n}x^2} = \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{|a|}\right)^{2n}$, 由 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{|a|}\right)^{2n}$ 的收敛性即知, 原级数绝对收敛.

(2) 当 $|a| \leq 1$ 时, 有 $|a_n| \geq \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}} > \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{1}{n}$, 故原级数发散.

【2730】 $\sum_{n=1}^{\infty} (2-x)(2-x^{\frac{1}{2}})(2-x^{\frac{1}{3}})\cdots(2-x^{\frac{1}{n}}) \quad (x > 0).$

解 记 $a_n = (2-x)(2-x^{\frac{1}{2}})\cdots(2-x^{\frac{1}{n}}).$

(1) 当 $x = 2$ 时, 显然 $a_n = 0 (n = 1, 2, \cdots)$, 故级数绝对收敛.

(2) 当 $x \neq 2$ 时, 注意 $x > 0$, 故有 $x^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$ (当 $n \rightarrow \infty$). 因此, 当 n 足够大时, a_n 不变号, 从而, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则必绝对收敛. 今用拉比判别法, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(x^{\frac{1}{n+1}} - 1)}{2 - x^{\frac{1}{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x^{\frac{1}{n+1}-1}}{\frac{1}{n+1}} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{2 - x^{\frac{1}{n+1}}} \right) = \ln x,$$

故当 $\ln x > 1$ 即 $x > e$ 时, 原级数绝对收敛. 当 $x < e$ 时, 原级数发散, 而当 $x = e$ 时, 此时有 (考虑当 n 足够大时)

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{1}{2 - e^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{1 - (e^{\frac{1}{n}} - 1)} = 1 + (e^{\frac{1}{n}} - 1) + O((e^{\frac{1}{n}} - 1)^2),$$

但 $e^{\frac{1}{n}} - 1 = \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, 故得

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

按高斯判别法, 原级数发散.

总之, 当 $x=2$ 及当 $x>e$ 时, 原级数绝对收敛.

【2731】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}.$

解 对于任意的 x , 只要 n 足够大, 该项就为正, 因此, 它可以看成正项级数. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}}{\frac{1}{n^x}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x,$$

故利用正项级数的判别法知: 当 $x>1$ 时, 级数收敛, 且为绝对收敛; 当 $x \leq 1$ 时, 级数发散.

【2732】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n y^n}{x^n + y^n} \quad (x>0, y>0).$

解 若 $x<1$, 将原级数写成

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^n}.$$

由于 $0 < \frac{x^n}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^n} \leq x^n$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ 当 $|x|<1$ 时收敛, 故原级数绝对收敛.

同理, 当 $y<1$ 时, 故级数绝对收敛.

总之, 当 $0 < \min(x, y) < 1$ 时, 原级数绝对收敛.

【2733】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+y^n} \quad (y \geq 0).$

解 记 $a_n = \frac{x^n}{n+y^n} \quad (y \geq 0).$

(1) 当 $|x|<1$ 时, 易见 $|a_n| \leq |x|^n \quad (n=1, 2, \dots)$. 由 $\sum_{n=1}^{\infty} |x|^n$ 的收敛性知原级数绝对收敛.

(2) 当 $x=1$ 时, (i) 若 $y>1$, 则由 $|a_n| = \frac{1}{n+y^n} < \left(\frac{1}{y}\right)^n$, 易见原级数绝对收敛, (ii) 若 $0 \leq y \leq 1$, 由于

$$\frac{a_n}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+y^n} \rightarrow 1 \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时}), \text{ 易见原级数发散.}$$

(3) 当 $x=-1$ 时, (i) 若 $y>1$, 由 $|a_n| = \frac{1}{n+y^n} < \left(\frac{1}{y}\right)^n \quad (n=1, 2, \dots)$, 易见原级数绝对收敛. (ii) 若 $0 \leq y \leq 1$, 由 $a_n = \frac{(-1)^n}{n+y^n} \quad (n=1, 2, \dots)$, 易见原级数条件收敛.

(4) 当 $|x|>1$ 时, (i) 若 $y=0$, 则由 $a_n = \frac{x^n}{n} \quad (n=1, 2, \dots)$, 易见原级数发散. (ii) 若 $y>0$, 则当

$\left|\frac{x}{y}\right| < 1$ 即 $|x| < y$ 时, 有 $|a_n| = \frac{|x|^n}{n+y^n} < \left|\frac{x}{y}\right|^n$, 故原级数绝对收敛. 当 $\left|\frac{x}{y}\right| \geq 1$ 时, 若 $y>1$, 有 $|a_n| = \left|\frac{x}{y}\right|^n \cdot \frac{1}{1 + \frac{n}{y^n}} \rightarrow +\infty \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时})$; 若 $0 < y \leq 1$, 有 $|a_n| > \frac{|x|^n}{n+1} \rightarrow +\infty \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时})$, 故当 $\left|\frac{x}{y}\right| \geq 1$ 时,

原级数发散.

总之,当 $|x|<1, 0\leq y<+\infty$;当 $|x|=1, y>1$ 及当 $|x|>1, |x|<y$ 时,原级数绝对收敛.当 $x=-1, 0\leq y\leq 1$ 时,原级数条件收敛.

【2734】 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{|x|^{n^2} + |y|^{n^2}}.$

提示 注意

$$a_n = \sqrt[n]{\left(\frac{|x|}{\max(|x|, |y|)}\right)^{n^2} + \left(\frac{|y|}{\max(|x|, |y|)}\right)^{n^2}} \cdot [\max(|x|, |y|)]^n$$

及 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \max(|x|, |y|).$

解 由于

$$a_n = \sqrt[n]{|x|^{n^2} + |y|^{n^2}} = \sqrt[n]{\left(\frac{|x|}{\max(|x|, |y|)}\right)^{n^2} + \left(\frac{|y|}{\max(|x|, |y|)}\right)^{n^2}} \cdot (\max(|x|, |y|))^n$$

及 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \max(|x|, |y|)$, 故当 $\max(|x|, |y|) < 1$ 时,级数绝对收敛;当 $\max(|x|, |y|) > 1$ 时,级数发散;当 $\max(|x|, |y|) = 1$ 时,由于 $a_n \rightarrow 1$ (当 $n \rightarrow \infty$),故级数发散.

【2735】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+x^n)}{n^y} \quad (x \geq 0).$

解 (1) 当 $0 \leq x < 1$ 时,此级数可与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^y}$ 相比,它们具有相同的敛散性.事实上 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+x^n)}{x^n} = 1$,且这两个级数均为正项级数.对于正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^y}, \quad (1)$$

其通项 $\frac{x^n}{n^y} \leq n^{|y|} x^n = b_n (n=1, 2, \dots)$, 但因 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b_n} = x < 1$, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛,且为绝对收敛.因此,级数(1)绝对收敛,从而,原级数也是绝对收敛的.

(2) 当 $x=1$ 时,级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln 2}{n^y}$. 于是,当 $y > 1$ 时收敛,且为绝对收敛;当 $y \leq 1$ 时发散.

(3) 当 $x > 1$ 时,原级数的通项可写成

$$\frac{\ln(1+x^n)}{n^y} = \frac{\ln x^n \left(1 + \frac{1}{x^n}\right)}{n^y} = \frac{\ln x}{n^{y-1}} + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x^n}\right)}{n^y}.$$

由上式右端第一项所组成的级数当 $y-1 > 1$ 即 $y > 2$ 时收敛,而当 $y \leq 2$ 时发散.由上式右端第二项所组成的级数,利用 $0 < \frac{1}{x} < 1$ 及最初讨论的结果.得知它对任意的 y 值均收敛.因此,原级数当 $x > 1, y > 2$ 时收敛,且为绝对收敛.

总之,当 $0 \leq x < 1, -\infty < y < +\infty$;当 $x=1, y > 1$ 及当 $x > 1, y > 2$ 时,原级数绝对收敛.

【2736】 $\sum_{n=1}^{\infty} \tan^n \left(x + \frac{y}{n}\right).$

解 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \tan^n \left(x + \frac{y}{n}\right) \right|} = |\tan x|,$$

故当 $|x - k\pi| < \frac{\pi}{4}$ (其中 k 为整数时), $|\tan x| < 1$, 从而级数绝对收敛. 而当 $|x - k\pi| \geq \frac{\pi}{4}$ 时, 由于 $\tan^n \left(x + \frac{y}{n}\right) \rightarrow \infty$, 故级数发散.

【2737】 证明:若洛朗级数 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x^n$ 当 $x=x_1$ 和 $x=x_2$ ($|x_1| < |x_2|$) 时收敛,则此级数当 $|x_1| < |x| < |x_2|$ 时也收敛.

证明思路 注意级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n, \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} x_1^{-n}, \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_2^n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} x_2^{-n}$ 均收敛,由此只要证明级数

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} x^{-n}$ 的收敛性 (当 $|x_1| < |x| < |x_2|$).

证 由于洛朗级数当 $x=x_1$ 和 $x=x_2$ 时收敛, 故级数

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n, \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} x_1^{-n}, \quad (3) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_2^n, \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} x_2^{-n}$$

均收敛. 于是, 由 (3) 知, 当 $|x| < |x_2|$ 时, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛. 由 (2) 知, 当 $\left|\frac{1}{x}\right| < \left|\frac{1}{x_1}\right|$ 即当 $|x_1| < |x|$ 时,

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} x^{-n}$ 收敛. 因而, 当 $|x_1| < |x| < |x_2|$ 时, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} x^{-n}$ 均收敛, 也即 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x^n$ 收敛.

【2738】 求洛朗级数 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{n}{2^{|n|}} x^n$ 的收敛域并求它的和.

解 考虑级数 (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^n$, (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-n}{2^n} x^{-n}$.

显然仅当 $|x| < 2$ 时, 级数 (1) 收敛; 仅当 $|x| > \frac{1}{2}$ 时, 级数 (2) 收敛. 因此, 当 $\frac{1}{2} < |x| < 2$ 时, 原级数收敛.

当 $\frac{1}{2} < |x| < 2$ 时, 记级数 (1) 的和为 $S_+(x)$, 级数 (2) 的和为 $S_-(x)$. 显然有

$$S_-(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^{-n} = -S_+\left(\frac{1}{x}\right).$$

今求 $S_+(x)$. 注意当 $\frac{1}{2} < |x| < 2$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{2^n} x^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^n$ 均收敛, 且有

$$\begin{aligned} S_+(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{2^n} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^n = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{2^{m+1}} x^{m+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n \\ &= \frac{x}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^n + \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{x}{2} S_+(x) + \frac{x}{2-x}, \end{aligned}$$

$$\text{得 } S_+(x) = \frac{\frac{x}{2-x}}{1-\frac{x}{2}} = \frac{2x}{(2-x)^2}, \quad \text{从而, } S_-(x) = -\frac{2 \cdot \frac{1}{x}}{\left(2-\frac{1}{x}\right)^2} = -\frac{2x}{(2x-1)^2},$$

故当 $\frac{1}{2} < |x| < 2$ 时, 有

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{n}{2^{|n|}} x^n = S_+(x) + S_-(x) = 2x \left[\frac{1}{(2-x)^2} - \frac{1}{(2x-1)^2} \right] = \frac{6x(x^2-1)}{(2-x)^2(2x-1)^2}.$$

【2739】 求牛顿级数的绝对收敛域与条件收敛域:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{[n]}}{n!}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \frac{x^{[n]}}{n!}; \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ex)^n y^{[n]}}{n^n},$$

其中 $x^{[n]} = x(x-1)\cdots[x-(n-1)]$.

解 (1) 由 2700 题的结果知, 当 $x \geq 0$ 时, 级数绝对收敛; 当 $-1 < x < 0$ 时, 级数条件收敛.

(2) 由于

$$\begin{aligned} x^{[n]} &= x(x-1)\cdots[x-(n-1)] = (-1)^{n-1} (n-1-x)(n-2-x)\cdots(2-x)(1-x)x \\ &= -(-1)^{n-1} (n+t)(n-1+t)\cdots(3+t)(2+t)(1+t), \end{aligned}$$

其中 $t = -(1+x)$, 故原级数可以改写为

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(1+t)(2+t)\cdots(n+t)}{n! n^p}.$$

利用 2699 题的结果知: 当 $p > t+1$ 即 $p > -x$ 时, 原级数绝对收敛. 当然, 当 $x=0, 1, 2, \cdots$ 时, 原级数也绝对收敛. 当 $t < p \leq t+1$ 即 $-(1+x) < p \leq -x$ 时, 原级数条件收敛.

(3) 令 $t = -(1+y)$, 则有 $y^{[n]} = (-1)^n (1+t)(2+t)\cdots(n+t)$, 记 $a_n = \frac{(ex)^n y^{[n]}}{n^n}$. 显然, 当 x 为任意数,

$y=0, 1, 2, \dots$ 时, $a_n=0 (n=1, 2, \dots)$. 于是, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛. 研究一下 $y \neq k (k=0, 1, 2, \dots)$ 的情形, 有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = -\frac{n+1}{n+1+t} \cdot \frac{1}{ex} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = -\frac{n+1}{n-y} \cdot \frac{1}{ex} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

(i) 当 $|x| < 1$ 时, 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left| \frac{n+1}{n-y} \right| \cdot \frac{1}{e|x|} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right] = \frac{1}{|x|} > 1,$$

故此时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛.

(ii) 当 $|x| > 1$ 且 n 充分大时, 有 $|a_n| < |a_{n+1}|$, 故 $a_n \not\rightarrow 0$, 从而, 原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

(iii) 当 $|x| = 1$ (考虑 n 足够大时), 有

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| &= \frac{n+1}{n-y} \cdot \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ &= \left[1 + \frac{1+y}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] \left[1 - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] = 1 + \frac{1+(y-\frac{1}{2})}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

于是, 1) 当 $y > \frac{1}{2}$ 时, 由高斯判别法知, 此时级数绝对收敛. 2) 当 $y \leq \frac{1}{2}$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散. 但当 $|y| < \frac{1}{2}$ 时, 有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = -\frac{1}{x} \left[1 + \frac{\mu}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right],$$

其中 $0 < \mu < 1$. 显然, 当 $x = -1$ 时, a_n 不变号, 因此, 可看成正项级数, 且

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\mu}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

由高斯判别法知, 此时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散; 当 $x = 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为交错级数, 且当 n 足够大时,

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 1 + \frac{\mu}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) > 1,$$

也即 $|a_n|$ 单调下降. 此外, 还有

$$|a_n| = |y| (1-y)(2-y)\cdots(n-1-y) \frac{e}{n^n} = e|y| \frac{1-y}{n} \frac{2-y}{n} \cdots \frac{n-1-y}{n} \cdot \frac{1}{n} < \frac{e|y|}{n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

由莱布尼茨判别法知, 当 $x = 1, |y| < \frac{1}{2}$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛.

总之, 当: (1) $|x| < 1$, y 为任意数; (2) $|x| = 1, y > \frac{1}{2}$; (3) x 为任意数, $y = 0, 1, 2, \dots$ 时, 原级数绝对收敛. 当 $x = 1, |y| < \frac{1}{2}$ 时, 原级数条件收敛.

【2740】 证明: 若狄利克雷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ 当 $x = x_0$ 收敛, 则此级数当 $x > x_0$ 时也收敛.

证明思路 注意 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n^{x_0}} \cdot \frac{1}{n^{x-x_0}} \right)$, 并利用阿贝尔判别法.

证 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n^{x_0}} \cdot \frac{1}{n^{x-x_0}} \right)$. 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}}$ 收敛, 并且 $\frac{1}{n^{x-x_0}}$ 当 $x > x_0$ 时单调下降趋于零, 故根

据阿贝尔判别法即知: 当 $x > x_0$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ 收敛.

【2741】 证明: 序列 $f_n(x) (n=1, 2, \dots)$ 在集合 X 上一致收敛于极限函数 $f(x)$ 的充分必要条件是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{a < x < b} \gamma_n(x) \right\} = 0,$$

式中 $\gamma_n(x) = |f(x) - f_n(x)|$.

提示 利用一致收敛的定义即获证.

证 先证必要性.

由于 $f_n(x)$ 在集合 X 上一致收敛于 $f(x)$, 故对任给的 $\epsilon > 0$, 总存在 $N(\epsilon) > 0$, 使当 $n > N(\epsilon)$ 时, 对于集合 X 上的一切 x 值, 均有

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

因此, 当 $n > N(\epsilon)$ 时, 有 $\sup_{a < x < b} \{ \gamma_n(x) \} \leq \epsilon$, 从而, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{a < x < b} \gamma_n(x) \right\} = 0$.

再证充分性.

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{a < x < b} \gamma_n(x) \right\} = 0$, 故对任给的 $\epsilon > 0$, 总存在 $N(\epsilon) > 0$, 使当 $n > N(\epsilon)$ 时, 有

$$\sup_{a < x < b} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

于是, 对于集合 X 上的一切 x 值, 只要当 $n > N(\epsilon)$ 时, 就有

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

因此, $f_n(x)$ 在集合 X 上一致收敛于 $f(x)$.

【2742】 序列 $f_n(x) (n=1, 2, \dots)$, (1) 在区间 $(x_0, +\infty)$ 上收敛; (2) 在每一个有限的区间 $(a, b) \subset (x_0, +\infty)$ 上一致收敛; (3) 在区间 $(x_0, +\infty)$ 上一致收敛, 这分别是什么意思?

解 (1) 对于任意的 $\epsilon > 0$ 及任意的 $x_0 < x < +\infty$, 都存在一个正整数 $N = N(\epsilon, x)$, 使得当 $n > N$ 时, 恒有

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon,$$

则称序列 $f_n(x)$ 在区间 $(x_0, +\infty)$ 上收敛. 要注意的是, N 不仅与 ϵ 有关, 而且与值 x 有关.

(2) 对每一个 $(a, b) \subset (x_0, +\infty)$, 如果对于任给的 $\epsilon > 0$, 存在一个 $N = N(\epsilon, a, b)$, 使当 $n > N$ 时, 对于 (a, b) 内的一切 x 值, 均有

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon,$$

则称 $f_n(x)$ 在 (a, b) 上一致收敛.

(3) 如果对于任给的 $\epsilon > 0$, 都存在正整数 $N = N(\epsilon)$ ($N(\epsilon)$ 仅与 ϵ 有关), 使当 $n > N$ 时, 对所有的 $x_0 < x < +\infty$, 均有

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon,$$

则称 $f_n(x)$ 在 $(x_0, +\infty)$ 上一致收敛.

【2743】 对于序列

$$f_n(x) = x^n \quad (n=1, 2, \dots) \quad (0 < x < 1)$$

求出其项的最小序号 $N = N(\epsilon, x)$, 使从这项起序列的项在已知点 x 与极限函数的差不超过 0.001, 设 $x = \frac{1}{10}, \frac{1}{\sqrt{10}}, \dots, \frac{1}{\sqrt[n]{10}}, \dots$. 此序列在已知区间 $(0, 1)$ 内是否一致收敛?

解 显见极限函数为零. 于是, 考虑

$$|x^n - 0| < \epsilon,$$

其中 $\epsilon = 0.001$. 当 $0 < x < 1$ 时, 上式即 $x^n < \epsilon$ 或 $n > \frac{\lg \epsilon}{\lg x}$, 故最小序号为 $N = \left[\frac{\lg \epsilon}{\lg x} \right]$.

$$\text{当 } x = \frac{1}{10} \text{ 时, } N = 3; \quad \text{当 } x = \frac{1}{\sqrt{10}} \text{ 时, } N = 6; \quad \dots; \quad \text{当 } x = \frac{1}{\sqrt[n]{10}} \text{ 时, } N = 3m; \quad \dots$$

下面研究此序列在 $(0, 1)$ 内的一致收敛性. 由于当 x 趋于 1 时, $\lg x$ 趋于零, 故

$$\frac{\lg \epsilon}{\lg x} \rightarrow +\infty \quad (0 < \epsilon < 1, x \rightarrow 1-0),$$

即 $\frac{\lg \epsilon}{\lg x}$ 无限增加. 因此, 不可能找到一个公共的 N (它仅与 ϵ 有关) 值, 使当 $n > N$ 时, 对于 $(0, 1)$ 内的一切 x

值, 均有 $x^n < \epsilon$. 因此, 序列

$$f_n(x) = x^n \quad (n=1, 2, \dots) \quad (0 < x < 1)$$

在区间 $(0, 1)$ 内不一致收敛.

【2744】 应当取级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n(n+1)}$ 的多少项方可使部分和 $S_n(x)$ 当 $-\infty < x < +\infty$ 时与级数的和之差小于 ϵ ? 对于下列 ϵ 值, 给出具体的计算结果:

(1) $\epsilon = 0.1$; (2) $\epsilon = 0.01$; (3) $\epsilon = 0.001$.

解 易证此级数收敛, 记其和为

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n(n+1)}.$$

如果取 n 值, 其部分和为 $S_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k(k+1)}$. 要使其误差 $\Delta_n(x) = |S(x) - S_n(x)|$ 小于 ϵ . 问项数 n 为若干? 可用下列估计法:

$$\begin{aligned} \Delta_n(x) &= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k(k+1)} \right| = \left| \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^N \frac{\sin kx}{k(k+1)} \right| \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^N \frac{|\sin kx|}{k(k+1)} \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k(k+1)} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^N \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{N+1} \right) = \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

若令 $\frac{1}{n+1} < \epsilon$, 也即当 $n > \frac{1}{\epsilon} - 1$ 时就有 $\Delta_n(x) < \epsilon$. 记 $N_0 = \left[\frac{1}{\epsilon} \right]$, 则当

$$n > \left[\frac{1}{\epsilon} \right] + \left\{ \frac{1}{\epsilon} \right\} - 1 = N_0 - (1 - \left\{ \frac{1}{\epsilon} \right\})$$

时, 即有 $\Delta_n(x) < \epsilon$, 其中 $\left\{ \frac{1}{\epsilon} \right\}$ 表示 $\frac{1}{\epsilon}$ 的零头部分, 也即可取

$$n = N_0, N_0 + 1, N_0 + 2, \dots$$

均有 $\Delta_n(x) < \epsilon$. 所取的项数 N_0 与 ϵ 的关系, 按题设数值, 可有

ϵ	(1) 0.1	(2) 0.01	(3) 0.001
N_0	10	100	1000

【2745】⁺ 对怎样的 n , 不等式 $\left| e^x - \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!} \right| < 0.001$ ($0 \leq x \leq 10$) 能保证成立?

解 由泰勒公式, 有

$$\Delta_n(x) = \left| e^x - \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!} \right| = \left| \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \frac{e^{10}}{(n+1)!} 10^{n+1},$$

其中 $0 < \theta < 1$. 要 $\Delta_n(x) < 0.001$, 只要 $\frac{e^{10}}{(n+1)!} 10^{n+1} < \frac{1}{1000}$. 也即要求 n , 使 $e^{10} 10^{n+4} < (n+1)!$. 为此, 两边取对数, 有

$$10 + (n+4)\ln 10 < \sum_{k=2}^{n+1} \ln k = p_n. \quad (1)$$

注意到 $p_n > \int_1^{n+1} \ln t dt = (n+1)\ln(n+1) - n$. 若能有

$$(n+1)\ln(n+1) > n(1 + \ln 10) + 10 + 4\ln 10, \quad (2)$$

就可保证(1)式成立, 从而, $\Delta_n(x) < 0.001$. 为解(2)中的 n , 可用估算法, 例如, 当 $n = 39$ 时, (2)式就成立, 故

对于 n 取 39, 即取 39 项时就能保证 $\left| e^x - \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!} \right| < 0.001$ ($0 \leq x \leq 10$).

研究序列在所给区间上的一致收敛性:

【2746】 $f_n(x) = x^n$; (1) $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$; (2) $0 \leq x \leq 1$.

提示 (1)一致收敛于零.(2)收敛而不一致收敛.取 $0 < \epsilon_0 < \frac{1}{2}$ 及 $x = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$ (不论 n 多大)即可证不一致收敛.

解 (1) 当 $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x)$. 任给 $\epsilon > 0$, 由于

$$|f_n(x) - f(x)| = |x|^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

故要使 $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, 只要 $\frac{1}{2^n} < \epsilon$, 即只要 $n > \frac{\ln \frac{1}{\epsilon}}{\ln 2}$. 取 $N = \left\lceil \frac{\ln \frac{1}{\epsilon}}{\ln 2} \right\rceil$, 则当 $n \geq N$ 时, 对于 $[0, \frac{1}{2}]$ 上的一切 x 值, 均有

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x) - 0| < \epsilon.$$

因此, $f_n(x) = x^n$ 在 $[0, \frac{1}{2}]$ 上一致收敛于零.

(2) $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 1, & x=1, \\ 0, & 0 \leq x < 1. \end{cases}$ 取 ϵ_0 使 $0 < \epsilon_0 < \frac{1}{2}$, 不论 n 多么大, 只要取 $x = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$, 就有

$$\left| f_n\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right) - f\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right) \right| = \frac{1}{2} > \epsilon_0.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上收敛而不一致收敛.

【2747】 $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$; $0 \leq x \leq 1$.

解 当 $x=0$ 或 1 时, $f_n(x)=0$; 当 $0 < x < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$. 因此, 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x)$, 并有

$$|f_n(x) - f(x)| = x^n - x^{n+1} = g(x).$$

由于 $g'(x) = x^{n-1}[n - (n+1)x]$, 故若令 $g'(x) = 0$, 即求得 $x = \frac{n}{n+1}$. 显然, 当 $0 < x < \frac{n}{n+1}$ 时, $g'(x) > 0$; 当 $\frac{n}{n+1} < x < 1$ 时, $g'(x) < 0$, 故 $g(x)$ 在 $x = \frac{n}{n+1}$ 达到 $[0, 1]$ 上的最大值. 于是, 对于 $0 \leq x \leq 1$, 有

$$g(x) \leq \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n+1}.$$

任给 $\epsilon > 0$, 要使 $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, 只要 $\frac{1}{n+1} < \epsilon$, 即只要 $n > \frac{1}{\epsilon}$. 取 $N = \left\lceil \frac{1}{\epsilon} \right\rceil$, 则当 $n > N$ 时, 对于 $[0, 1]$ 上的一切 x 值, 均有

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x) - 0| < \epsilon.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛于零.

【2748】 $f_n(x) = x^n - x^{2n}$; $0 \leq x \leq 1$.

提示 收敛而不一致收敛. 取 $0 < \epsilon_0 < \frac{1}{4}$ 及 $x = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$ (不论 n 多大)即可证不一致收敛.

解 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x)$, 并有

$$|f_n(x) - f(x)| = x^n - x^{2n}.$$

取 ϵ_0 使 $0 < \epsilon_0 < \frac{1}{4}$, 不论 n 多么大, 只要取 $x = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$, 就有

$$\left| f_n\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right) - f\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right) \right| = \frac{1}{4} > \epsilon_0.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上收敛而不一致收敛.

【2749】 $f_n(x) = \frac{1}{x+n}$; $0 < x < +\infty$.

提示 利用一致收敛的定义, 可知 $f_n(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上一致收敛于零.

解 当 $0 < x < +\infty$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x)$, 并有

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{x+n} < \frac{1}{n}.$$

任给 $\epsilon > 0$, 要使 $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, 只要 $\frac{1}{n} < \epsilon$, 即只要 $n > \frac{1}{\epsilon}$. 取 $N = [\frac{1}{\epsilon}]$, 则当 $n > N$ 时, 对于 $x > 0$ 的一切 x 值, 均有

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x) - 0| < \epsilon.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内一致收敛于零.

【2750】 $f_n(x) = \frac{nx}{1+n+x}; 0 \leq x \leq 1.$

提示 利用一致收敛的定义, 可知 $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛于 x .

解 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = x = f(x)$, 并有

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{nx}{1+n+x} - x \right| = \frac{x+x^2}{1+n+x} < \frac{2}{n+1} < \frac{2}{n}.$$

任给 $\epsilon > 0$, 要使 $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, 只要 $n > \frac{2}{\epsilon}$. 取 $N = [\frac{2}{\epsilon}]$, 则当 $n > N$ 时, 对于 $[0, 1]$ 上的一切 x 值, 均有

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x) - x| < \epsilon.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛于 x .

【2751】 $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}; (1) 0 \leq x \leq 1-\epsilon; (2) 1-\epsilon \leq x \leq 1+\epsilon; (3) 1+\epsilon \leq x < +\infty$, 其中 $\epsilon > 0$.

解 (1) 当 $0 \leq x \leq 1-\epsilon$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x)$, 并有

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{x^n}{1+x^n} < (1-\epsilon)^n.$$

任给 $\epsilon' > 0$, 要使 $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon'$, 只要 $(1-\epsilon)^n < \epsilon'$, 即只要 $n > \frac{\lg \epsilon'}{\lg(1-\epsilon)}$. 取 $N = [\frac{\lg \epsilon'}{\lg(1-\epsilon)}]$, 则当 $n > N$ 时, 对于 $[0, 1-\epsilon]$ 上的一切 x 值, 均有 $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon'$. 因此, $f_n(x)$ 在 $[0, 1-\epsilon]$ 上一致收敛于零.

$$(2) f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & 1-\epsilon \leq x < 1, \\ \frac{1}{2}, & x = 1, \\ 1, & 1 < x \leq 1+\epsilon. \end{cases}$$

取 ϵ_0 使 $0 < \epsilon_0 < \frac{1}{3}$, 不论 n 多么大, 只要取 $x = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$, 就有

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{3} > \epsilon_0.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $[1-\epsilon, 1+\epsilon]$ 上收敛而不一致收敛.

(3) 当 $1+\epsilon \leq x < +\infty$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 1 = f(x)$, 并有

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{1+x^n} < \frac{1}{(1+\epsilon)^n}.$$

任给 $\epsilon' > 0$, 要使 $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon'$, 只要 $\frac{1}{(1+\epsilon)^n} < \epsilon'$, 即只要 $n > \frac{\lg \frac{1}{\epsilon'}}{\lg(1+\epsilon)}$. 取 $N = \left[\frac{\lg \frac{1}{\epsilon'}}{\lg(1+\epsilon)} \right]$, 则当 $n > N$ 时, 对于 $x \geq 1+\epsilon$ 的一切 x 值, 均有

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x) - 1| < \epsilon'.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $[1+\epsilon, +\infty)$ 上一致收敛于数 1.

【2752】 $f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}; (1) 0 \leq x \leq 1; (2) 1 < x < +\infty.$

解 (1) 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x)$. 取 ϵ_0 使 $0 < \epsilon_0 < 1$, 不论 n 多么大, 只要取 $x = \frac{1}{n}$, 就有

$$\left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) \right| = 1 > \epsilon_0.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上不一致收敛.

(2) 当 $1 < x < +\infty$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x)$, 并有

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{2nx}{1+n^2x^2} < \frac{2nx}{n^2x^2} < \frac{2}{n}.$$

任给 $\epsilon > 0$, 要使 $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, 只要 $n > \frac{2}{\epsilon}$. 取 $N = [\frac{2}{\epsilon}]$, 则当 $n > N$ 时, 对于 $x > 1$ 的一切 x 值, 均有 $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$. 因此, $f_n(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上一致收敛.

【2753】 $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}; -\infty < x < +\infty.$

解 当 $-\infty < x < +\infty$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = |x| = f(x)$, 并有

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{x^2 + \frac{1}{n^2} - x^2}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} + |x|} < \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}.$$

任给 $\epsilon > 0$, 要使 $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, 只要 $n > \frac{1}{\epsilon}$. 取 $N = [\frac{1}{\epsilon}]$, 则当 $n > N$ 时, 对于一切实数 x , 均有 $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$. 因此, $f_n(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.

【2754】 $f_n(x) = n\left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x}\right); 0 < x < +\infty.$

解 当 $0 < x < +\infty$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\left[\left(x + \frac{1}{n}\right) - x\right]}{\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = f(x).$$

若取 $x = \frac{1}{n}$, 则有

$$\begin{aligned} \left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) \right| &= \left| n\left(\sqrt{\frac{2}{n}} - \sqrt{\frac{1}{n}}\right) - \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{n}}} \right| \\ &= \sqrt{n} \left| \sqrt{2} - 1 - \frac{1}{2} \right| = \sqrt{n} \frac{\sqrt{2} - 1}{2(\sqrt{2} + 1)} = \frac{\sqrt{n}}{2(\sqrt{2} + 1)^2} > \frac{1}{18} \sqrt{n}. \end{aligned}$$

当 n 充分大时, 它就可以大于指定的 $\epsilon_0 > 0$. 因此, $f_n(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上收敛而不一致收敛.

【2755】 (1) $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}; -\infty < x < +\infty;$ (2) $f_n(x) = \sin \frac{x}{n}; -\infty < x < +\infty.$

提示 (1) 一致收敛. (2) 收敛而不一致收敛. 取 $0 < \epsilon_0 < 1$ 及 $x = \frac{n\pi}{2}$ (不论 n 多大) 即可证不一致收敛.

解 (1) 当 $-\infty < x < +\infty$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x)$, 并有

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{|\sin nx|}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

任给 $\epsilon > 0$, 要使 $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, 只要 $n > \frac{1}{\epsilon}$. 取 $N = [\frac{1}{\epsilon}]$, 则当 $n > N$ 时, 对于一切实数 x , 均有

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.

(2) 当 $-\infty < x < +\infty$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x)$. 取 ϵ_0 使 $0 < \epsilon_0 < 1$, 不论 n 多么大, 只要取 $x = \frac{n\pi}{2}$, 就有

$$\left| f_n\left(\frac{n\pi}{2}\right) - f\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right| = 1 > \epsilon_0.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上收敛而不一致收敛.

【2756】 (1) $f_n(x) = \arctan nx$; $0 < x < +\infty$; (2) $f_n(x) = x \arctan nx$; $0 < x < +\infty$.

解 (1) 当 $0 < x < +\infty$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \arctan nx = \frac{\pi}{2} = f(x)$. 取 ϵ_0 使 $0 < \epsilon_0 < \frac{\pi}{4}$, 不论 n 多么大, 只要取 $x = \frac{1}{n}$, 就有

$$\left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) \right| = \left| \arctan 1 - \frac{\pi}{2} \right| = \frac{\pi}{4} > \epsilon_0.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上收敛而不一致收敛.

(2) 当 $0 < x < +\infty$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \frac{\pi}{2}x = f(x)$, 并有

$$|f_n(x) - f(x)| = x \left| \arctan nx - \frac{\pi}{2} \right| = x \left| -\arctan \frac{1}{nx} \right| \leq x \cdot \frac{1}{nx} = \frac{1}{n}.$$

任给 $\epsilon > 0$, 要使 $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, 只要 $n > \frac{1}{\epsilon}$. 取 $N = \left[\frac{1}{\epsilon} \right]$, 则当 $n > N$ 时, 对于 $x > 0$ 的一切 x 值, 均有

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上一致收敛.

【2757】 $f_n(x) = e^{n(x-1)}$; $0 < x < 1$.

提示 显见 $f_n(x)$ 在 $(0, 1)$ 上收敛. 但若取 $0 < \epsilon_0 < e^{-1}$, 不论 n 多大, 只要取 $x = 1 - \frac{1}{n}$, 即可知 $f_n(x)$ 在 $(0, 1)$ 上不一致收敛.

解 当 $0 < x < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x)$. 取 ϵ_0 使 $0 < \epsilon_0 < e^{-1}$, 不论 n 多么大, 只要取 $x = 1 - \frac{1}{n}$, 就有

$$\left| f_n\left(1 - \frac{1}{n}\right) - f\left(1 - \frac{1}{n}\right) \right| = e^{n(1 - \frac{1}{n} - 1)} = e^{-1} > \epsilon_0.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $(0, 1)$ 上收敛而不一致收敛.

【2758】 $f_n(x) = e^{-(x-n)^2}$; (1) $-l < x < l$, 其中 l 为任意的正数; (2) $-\infty < x < +\infty$.

解 (1) 当 $-l < x < l$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x)$, 并有 (当 $n > [l]$ 时)

$$|f_n(x) - f(x)| = e^{-(x-n)^2} \leq e^{-(n-l)^2}.$$

任给 $\epsilon > 0$ (可设 $\epsilon < 1$), 要使 $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, 只要 $n > [l]$ 且 $e^{-(n-l)^2} < \epsilon$, 即只要 $n > l + \ln \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$. 取 $N = \left[l + \ln \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \right]$, 则当 $n > N$ 时, 对于 $(-l, l)$ 上的一切 x 值, 均有

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $(-l, l)$ 上一致收敛.

(2) 当 $-\infty < x < +\infty$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x)$. 取 ϵ_0 使 $0 < \epsilon_0 < 1$, 不论 n 多么大, 只要取 $x = n$, 就有

$$|f_n(n) - f(n)| = 1 > \epsilon_0.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上收敛而不一致收敛.

【2759】 $f_n(x) = \frac{x}{n} \ln \frac{x}{n}$; $0 < x < 1$.

解 当 $0 < x < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n} = 0$. 又 $\lim_{t \rightarrow +0} t \ln t = 0$, 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x). \quad |f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{x}{n} \ln \frac{x}{n} \right|.$$

任给 $\epsilon > 0$. 由于 $\lim_{t \rightarrow +0} t \ln t = 0$, 故存在 $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, 使当 $0 < t < \delta$ 时, 恒有 $|t \ln t| < \epsilon$. 取 $N = \left[\frac{1}{\delta} \right]$, 则当 $n > N$ 时,

$\frac{1}{n} < \delta$, 从而对一切 $0 < x < 1$, 都有 $0 < \frac{x}{n} < \delta$, 故

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{x}{n} \ln \frac{x}{n} \right| < \epsilon.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $(0, 1)$ 上一致收敛.

【2760】 $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$; (1) 在有限的区间 (a, b) 上; (2) 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上.

解 (1) 当 $a < x < b$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}} \right)^x = e^x = f(x).$$

记 $c = \max\{|a|, |b|\}$. 由泰勒公式知

$$\ln f_n(x) = n \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right) = n \left[\frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{\theta x}{n}\right)^3} \cdot \frac{x^3}{n^3} \right],$$

其中 $0 < \theta < 1$, $\left|\frac{\theta x}{n}\right| \leq \frac{c}{n}$, $|x^3| \leq c^3$, 故

$$\ln f_n(x) = x - \frac{x^2}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

于是, 易知

$$f_n(x) = e^{x - \frac{x^2}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)} = e^x \left[1 - \frac{x^2}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right].$$

取适当的 N_1 , 则当 $n > N_1$ 时, 就有

$$|f_n(x) - f(x)| = e^x \left| -\frac{x^2}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right| \leq \frac{c^2 e^c}{n} \quad (a < x < b).$$

任给 $\epsilon > 0$, 要使 $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, 只要 $n > N_1$, 且 $n > \frac{c^2 e^c}{\epsilon}$. 取 $N = \max\left(N_1, \left[\frac{c^2 e^c}{\epsilon}\right]\right)$, 则当 $n > N$ 时, 对于 (a, b) 上的一切 x 值, 均有

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

因此, $f_n(x)$ 在 (a, b) 上一致收敛.

(2) $|f_n(x) - f(x)| = \left| \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n - e^x \right|$. 不论 n 多么大, 只要取 $x = n$, 就有

$$|f_n(n) - f(n)| = 2^n \left[\left(\frac{e}{2}\right)^n - 1 \right],$$

它趋于 $+\infty$, 不可能小于任给的 $\epsilon > 0$. 因此, $f_n(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上收敛而不一致收敛.

【2761】 $f_n(x) = n(x^{\frac{1}{n}} - 1)$; $1 \leq x \leq a$.

解 当 $1 \leq x \leq a$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \ln x = f(x),$$

并有

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= |n(x^{\frac{1}{n}} - 1) - n \ln[1 + (x^{\frac{1}{n}} - 1)]| \\ &= \left| n(x^{\frac{1}{n}} - 1) - n(x^{\frac{1}{n}} - 1) + \frac{n}{2}(x^{\frac{1}{n}} - 1)^2 + nO((x^{\frac{1}{n}} - 1)^3) \right| \\ &= \frac{1}{2n} \left(\frac{x^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} \right)^2 + O\left(\frac{1}{n^2}\right) < \frac{(\ln a)^2}{n} + A \cdot \frac{1}{n^2}, \end{aligned}$$

其中 $A > 0$ 为常数, 上述不等式可在适当的 N_1 取定后当 $n > N_1$ 时成立. 显然对任给的 $\epsilon > 0$, 存在 N_2 , 使当 $n > N_2$ 时, $\frac{(\ln a)^2}{n} + A \cdot \frac{1}{n^2} < \epsilon$, 于是, 取 $N = \max(N_1, N_2)$, 则当 $n > N$ 时, 对于 $[1, a]$ 上的一切 x 值, 均有

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $[1, a]$ 上一致收敛.

【2762】 $f_n(x) = \sqrt[n]{1+x^n}; 0 \leq x \leq 2$.

解 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ x, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$

(1) 当 $0 \leq x \leq 1$ 时,

$$|f_n(x) - f(x)| = |\sqrt[n]{1+x^n} - 1| = \frac{x^n}{(1+x^n)^{\frac{n-1}{n}} + (1+x^n)^{\frac{n-2}{n}} + \cdots + (1+x^n)^{\frac{1}{n}} + 1} < \frac{1}{n},$$

(2) 当 $1 < x \leq 2$ 时,

$$|f_n(x) - f(x)| = |\sqrt[n]{1+x^n} - x| = \frac{1}{(1+x^n)^{\frac{n-1}{n}} + x(1+x^n)^{\frac{n-2}{n}} + \cdots + x^{n-2}(1+x^n)^{\frac{1}{n}} + x^{n-1}} < \frac{1}{nx^{n-1}} < \frac{1}{n}.$$

因此, 对于 $0 \leq x \leq 2$ 的一切 x 值, 均有

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{n}.$$

任给 $\epsilon > 0$, 要使 $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, 只要 $n > \frac{1}{\epsilon}$. 取 $N = [\frac{1}{\epsilon}]$, 则当 $n > N$ 时, 对于 $[0, 2]$ 上的一切 x 值, 均有

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $[0, 2]$ 上一致收敛.

【2763】

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ n^2 (\frac{2}{n} - x), & \frac{1}{n} < x < \frac{2}{n}, \\ 0, & x \geq \frac{2}{n}; \end{cases}$$

在闭区间 $0 \leq x \leq 1$ 上.

解 当 $x=0$ 时, $f_n(x)=0$, 因而 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0)=0$.

当 $x \neq 0$ 时, 在 $[0, 1]$ 上, $x > 0$. 对于任给的 $\epsilon > 0$, 取适当大的正整数 $N > \frac{1}{\epsilon}$, 使 $\frac{2}{N} \leq x$, 则当 $n > N$ 时, 有 $\frac{2}{n} < \frac{2}{N} \leq x$. 于是, $f_n(x)=0$. 因此, 当 $0 \leq x \leq 1$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x).$$

取 ϵ_0 使 $0 < \epsilon_0 < 1$, 不论 n 多么大, 只要取 $x = \frac{1}{n^2}$, 就有

$$\left| f_n\left(\frac{1}{n^2}\right) - f\left(\frac{1}{n^2}\right) \right| = n^2 \cdot \frac{1}{n^2} = 1 > \epsilon_0.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上收敛而不一致收敛.

【2764】 设 $f(x)$ 为定义于闭区间 $[a, b]$ 上的任意函数, 且

$$f_n(x) = \frac{[nf(x)]}{n} \quad (n=1, 2, \cdots).$$

证明: 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $f_n(x) \rightarrow f(x)$ ($a \leq x \leq b$).

证 由于

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n} |[nf(x)] - nf(x)| \leq \frac{1}{n},$$

故对任给的 $\epsilon > 0$, 若取 $N = [\frac{1}{\epsilon}]$, 则当 $n > N$ 时, 对于一切 $x \in [a, b]$, 均有

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

【2765】 设函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内有连续的导数 $f'(x)$, 且

$$f_n(x) = n \left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right].$$

证明: 在闭区间 $a \leq x \leq \beta$ 上 (其中 $a < a < \beta < b$), $f_n(x) \rightarrow f'(x)$.

证 考虑 $[a', \beta']$, 其中 $a < a' < a < \beta < \beta' < b$. 由于 $f_n(x)$ (n 充分大) 在 $[a', \beta']$ 上有连续导数, 由微分中值公式, 得

$$f_n(x) = n \left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right] = n f' \left(x + \frac{\theta}{n} \right) \cdot \frac{1}{n} = f' \left(x + \frac{\theta}{n} \right) \quad (0 < \theta < 1).$$

又因 $f'(x)$ 在 $[a', \beta']$ 上连续, 所以 $f'(x)$ 在 $[a', \beta']$ 上一致连续, 即对任给的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, 使对于 $[a', \beta']$ 上的任意点 x' 及 x'' , 只要当 $|x' - x''| < \delta$ 时, 就有 $|f'(x') - f'(x'')| < \epsilon$. 今取 $N = \left[\frac{1}{\delta} \right] + 1 = N(\epsilon)$, 则当 $n > N$ 时, 有 $\frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \delta$. 于是, 对 $[a, \beta]$ 上的一切 x 值, 只要 N 足够大, 就可保证 x 与 $x + \frac{\theta}{n}$ 均属于 $[a', \beta']$. 于是, 对于 $[a, \beta]$ 上的一切 x 值, 均有

$$|f_n(x) - f'(x)| = \left| f' \left(x + \frac{\theta}{n} \right) - f'(x) \right| < \epsilon.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $[a, \beta]$ 上一致收敛于 $f'(x)$.

【2766】 设 $f_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(x + \frac{i}{n}\right)$, 其中 $f(x)$ 为 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数. 证明: 序列 $f_n(x)$ 在任何有限闭区间 $[a, b]$ 上一致收敛.

证 记 $f_n(x)$ 的极限函数为 $F(x)$, 则

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \int_x^{x+1} f(t) dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x+\frac{i}{n}}^{x+\frac{i+1}{n}} f(t) dt = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(x + \frac{i}{n} + \frac{\theta_i}{n}\right) \quad (0 < \theta_i < 1; i = 0, 1, \dots, n-1).$$

由于 $f(x)$ 在 $[a, b+1]$ 上连续, 故它在 $[a, b+1]$ 上一致连续, 即对任给的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, 使对于 $[a, b+1]$ 上的任意点 x' 及 x'' , 只要当 $|x' - x''| < \delta$ 时, 就有 $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$. 今取 $N = \left[\frac{1}{\delta} \right] + 1$, 则当 $n > N$, $a \leq x \leq b$ 时, 有

$$\left| \left(x + \frac{i}{n} + \frac{\theta_i}{n} \right) - \left(x + \frac{i}{n} \right) \right| < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \delta$$

且

$$x + \frac{i}{n} \in [a, b+1], \quad x + \frac{i}{n} + \frac{\theta_i}{n} \in [a, b+1] \quad (i = 0, 1, \dots, n-1).$$

于是,

$$|F(x) - f_n(x)| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \left| f\left(x + \frac{i}{n} + \frac{\theta_i}{n}\right) - f\left(x + \frac{i}{n}\right) \right| < \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot \epsilon = \frac{1}{n} \cdot n\epsilon = \epsilon.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

研究下列级数的收敛性:

【2767】 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$; (1) 在区间 $|x| < q$ 内, 此处 $q < 1$, (2) 在区间 $|x| < 1$ 内.

解 (1) 由于 $|x^n| < q^n$ 及 $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ 收敛 ($0 < q < 1$), 故由魏尔斯特拉斯判别法知, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 在 $|x| < q < 1$ 内绝对并一致收敛.

(2) $S_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. 当 $|x| < 1$ 时, 有

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \frac{1}{1-x}.$$

取 ϵ_0 使 $0 < \epsilon_0 < \frac{1}{2}$, 不论 n 多么大, 只要取 $x = \frac{1}{n+1\sqrt{2}}$, 就有

$$\left| S_n\left(\frac{1}{n+1\sqrt{2}}\right) - S\left(\frac{1}{n+1\sqrt{2}}\right) \right| = \left| \frac{\frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{1}{n+1\sqrt{2}}\right)^{-1}} \right| > \frac{1}{2} > \epsilon_0.$$

因此, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty}$ 在 $|x| < 1$ 内收敛而不一致收敛.

【2768】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$; 在闭区间 $-1 \leq x \leq 1$ 上.

提示 注意 $\left| \frac{x^n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ ($-1 \leq x \leq 1$), 并利用魏尔斯特拉斯判别法.

解 由于当 $-1 \leq x \leq 1$ 时 $\left| \frac{x^n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故由魏尔斯特拉斯判别法知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ 在 $[-1, 1]$ 上绝对并一致收敛.

【2769】 $\sum_{n=0}^{\infty} (1-x)x^n$; 在闭区间 $0 \leq x \leq 1$ 上.

提示 注意 $S_n(x) = 1 - x^{n+1}$ 及 $S(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & x = 1. \end{cases}$ 收敛而不一致收敛. 取 $0 < \epsilon_0 < \frac{1}{2}$ 及 $x = \frac{1}{n+1\sqrt{2}}$

(不论 n 多大) 即可证不一致收敛.

解 $S_n(x) = \sum_{k=0}^n (1-x)x^k = (1-x) \sum_{k=0}^n x^k = 1 - x^{n+1}.$

于是,

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & x = 1. \end{cases}$$

取 ϵ_0 使 $0 < \epsilon_0 < \frac{1}{2}$, 不论 n 多么大, 只要取 $x = \frac{1}{n+1\sqrt{2}}$, 就有

$$\left| S_n\left(\frac{1}{n+1\sqrt{2}}\right) - S\left(\frac{1}{n+1\sqrt{2}}\right) \right| = \left| \frac{1}{2} - 1 \right| = \frac{1}{2} > \epsilon_0.$$

因此, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (1-x)x^n$ 在 $[0, 1]$ 上收敛而不一致收敛.

【2770】 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1} \right)$; $-1 \leq x \leq 1$.

解 $S_n(x) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{x^k}{k} - \frac{x^{k+1}}{k+1} \right) = x - \frac{x^{n+1}}{n+1}.$

当 $-1 \leq x \leq 1$ 时, 有

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = x, \quad |S_n(x) - S(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}.$$

于是, 对任给的 $\epsilon > 0$, 若取 $N = \left[\frac{1}{\epsilon} \right]$, 则当 $n > N$ 时, 对于 $[-1, 1]$ 上的一切 x 值, 均有

$$|S_n(x) - S(x)| < \frac{1}{n} < \epsilon.$$

因此, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1} \right)$ 在 $[-1, 1]$ 上一致收敛.

【2771】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)}$; $0 < x < +\infty$.

$$\text{解 } S_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x}{[(k-1)x+1](kx+1)} = \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{(k-1)x+1} - \frac{1}{kx+1} \right] = 1 - \frac{1}{nx+1}.$$

当 $0 < x < +\infty$ 时, 有 $S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = 1$. 取 ε_0 使 $0 < \varepsilon_0 < \frac{1}{2}$, 不论 n 多么大, 只要取 $x = \frac{1}{n}$, 就有

$$\left| S_n\left(\frac{1}{n}\right) - S\left(\frac{1}{n}\right) \right| = \frac{1}{2} > \varepsilon_0.$$

因此, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)}$ 在 $(0, +\infty)$ 上收敛而不一致收敛.

$$\text{【2772】 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}; \quad 0 < x < +\infty.$$

解 由于 $\left| \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} \right| < \frac{1}{n^2} \quad (x > 0)$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故由魏尔斯特拉斯判别法知, 原级数在 $(0, +\infty)$ 上绝对并一致收敛.

$$\text{【2773】 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}; \quad (1) \quad 0 \leq x \leq \varepsilon, \text{ 其中 } \varepsilon > 0; \quad (2) \quad \varepsilon \leq x < +\infty.$$

解 当 $x=0$ 时, 显然级数收敛于零.

当 $x > 0$ 时, 令 $u_n(x) = \frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}$, 则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{1+(n+1)x} \right] = 0 < 1,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 收敛 ($x \geq 0$). 易见, 此时

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{k=1}^n u_k(x) = \sum_{k=1}^n \frac{kx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+kx)} \\ &= \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{(1+x)\cdots[1+(k-1)x]} - \frac{1}{(1+x)\cdots(1+kx)} \right] \\ &= 1 - \frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

$$\text{因此有 } 2S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \begin{cases} 0, & x=0, \\ 1, & x>0. \end{cases}$$

(1) 当 $x > 0$ 时, 有

$$|S_n(x) - S(x)| = \frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}.$$

取 $0 < \varepsilon_0 < 1$. 对于任意大 (但固定的) n , 由于

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)} = 1,$$

故可取 $0 < x_0 < \varepsilon$, 使 $\frac{1}{(1+x_0)(1+2x_0)\cdots(1+nx_0)} > \varepsilon_0$, 即 $|S_n(x_0) - S(x_0)| > \varepsilon_0$. 由此可知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $0 \leq x \leq \varepsilon$ 上不一致收敛.

(2) 当 $x \geq \varepsilon$ 及 $n \geq 3$ 时, 由于

$$\begin{aligned} |u_n(x)| &= \left| \frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)} \right| < \frac{nx}{(1+x)^n} \\ &= \frac{nx}{1+nx + \frac{1}{2!}n(n-1)x^2 + \cdots + x^n} < \frac{nx}{\frac{1}{3!}n(n-1)(n-2)x^3} \\ &= \frac{6}{(n-1)(n-2)x^2} < \frac{6}{(n-2)^2\varepsilon^2}, \end{aligned}$$

且级数 $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{6}{(n-2)^2\varepsilon^2}$ 收敛, 故由魏尔斯特拉斯判别法知, 原级数在 $[\varepsilon, +\infty)$ 上绝对并一致收敛.

【2774】 利用魏尔斯特拉斯判别法,证明下列函数项级数在所给区间内的一致收敛性:

- (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2}, -\infty < x < +\infty;$
- (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+2^n}, -2 < x < +\infty;$
- (3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4 x^2}, 0 \leq x < +\infty;$
- (4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5 x^2}, |x| < +\infty;$
- (5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n+x^{-n}), \frac{1}{2} \leq |x| \leq 2;$
- (6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\left[\frac{n}{2}\right]!}, |x| < a, a \text{ 为任意正数};$
- (7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}, |x| < +\infty;$
- (8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}, |x| < +\infty;$
- (9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}, |x| < +\infty;$
- (10) $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1+\frac{x}{n\ln^2 n}\right), |x| < a;$
- (11) $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}, 0 \leq x < +\infty;$
- (12) $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{2x}{x^2+n^3}, |x| < +\infty.$

提示 注意(2) $\left|\frac{(-1)^n}{x+2^n}\right| < \frac{1}{2^n-1} (n \geq 2, x > -2),$ (3) $1+n^4 x^2 \geq 2n^2 x (x > 0),$

(4) $1+n^5 x^2 \geq 2n^{\frac{5}{2}} x,$ (5) $\left|\frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n+x^{-n})\right| \leq \frac{n^2 \cdot 2^{n+1}}{\sqrt{n!}},$

(6) 当 $n=2m$ 或 $2m+1$ 时, $u_n(x) = \frac{x^n}{m!},$ 考虑级数 $\sum_{m=1}^{\infty} u_{2m}(x)$ 与 $\sum_{m=1}^{\infty} u_{2m+1}(x),$

解 (1) 由于 $\left|\frac{1}{x^2+n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.

(2) 考虑 $n \geq 2,$ 有 $\left|\frac{(-1)^n}{x+2^n}\right| < \frac{1}{2^n-2} \leq \frac{1}{2^{n-1}} (x > -2).$ 但 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+2^n}$ 在 $(-2, +\infty)$ 上一致收敛.

(3) 当 $x=0$ 时, 级数显然收敛于零. 当 $x > 0$ 时, $1+n^4 x^2 \geq 2n^2 x,$ 于是, $\left|\frac{x}{1+n^4 x^2}\right| \leq \frac{1}{2n^2}.$ 又因 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4 x^2}$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛.

(4) 当 $|x| < +\infty$ 时, $1+n^5 x^2 \geq 2n^{\frac{5}{2}} x,$ 于是, $\left|\frac{nx}{1+n^5 x^2}\right| \leq \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}.$ 又因 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5 x^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.

(5) 当 $\frac{1}{2} \leq |x| \leq 2$ 时,

$$\left|\frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n+x^{-n})\right| \leq \frac{n^2}{\sqrt{n!}}(|x|^n+|x|^{-n}) \leq \frac{n^2 \cdot 2^{n+1}}{\sqrt{n!}}.$$

对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cdot 2^{n+1}}{\sqrt{n!}},$ 应用达朗贝尔判别法, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\frac{\frac{(n+1)^2 \cdot 2^{n+2}}{\sqrt{(n+1)!}}}{\frac{n^2 \cdot 2^{n+1}}{\sqrt{n!}}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \frac{2}{\sqrt{n+1}} \rightarrow 0 < 1,$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cdot 2^{n+1}}{\sqrt{n!}}$ 收敛. 因此, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n+x^{-n})$ 当 $\frac{1}{2} \leq |x| \leq 2$ 时一致收敛.

(6) 当 $n=2m$ 或 $2m+1$ 时, $u_n(x) = \frac{x^n}{m!}.$ 考虑级数 $\sum_{m=1}^{\infty} u_{2m}(x)$ 与 $\sum_{m=1}^{\infty} u_{2m+1}(x),$ 当 $|x| < a$ 时, 不论 $n=2m$ 还是 $n=2m+1,$ 均有 $\left|\frac{x^n}{m!}\right| < \frac{a^n}{m!}.$ 应用达朗贝尔判别法, 易证级数 $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^{2m}}{m!}$ 及 $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^{2m+1}}{m!}$ 均收敛. 因此, 级

数 $\sum_{m=1}^{\infty} u_{2m}(x)$ 与 $\sum_{m=1}^{\infty} u_{2m+1}(x)$ 当 $|x| < a$ 时绝对并一致收敛. 从而, 原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{[\frac{n}{2}]!}$ 当 $|x| < a$ 时一致收敛.

(7) 当 $|x| < +\infty$ 时, $\left| \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}} \right| \leq \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$ 当 $|x| < +\infty$ 时一致收敛.

(8) 当 $|x| < +\infty$ 时, $\left| \frac{\cos nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ 当 $|x| < +\infty$ 时一致收敛.

(9) 当 $|x| < +\infty$ 时, $\left| \frac{\sin nx}{n\sqrt{n}} \right| \leq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}$ 当 $|x| < +\infty$ 时一致收敛.

(10) 当 n 充分大 (即 $n \geq n_0$) 时, 对于 $|x| < a$, 有

$$\ln\left(1 + \frac{x}{n \ln^2 n}\right) = \frac{x}{n \ln^2 n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

但当 $|x| < a$ 时, $\left| \frac{x}{n \ln^2 n} \right| \leq \frac{a}{n \ln^2 n}$, 而 $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{a}{n \ln^2 n}$ 收敛, 以及 $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 也收敛, 故级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{x}{n \ln^2 n}\right)$ 当 $|x| < a$ 时一致收敛.

*) 利用 2619 题的结果.

(11) 当 $x > 0$ 时, $e^x > 1 + nx + \frac{n^2 x^2}{2} > \frac{n^2 x^2}{2}$, 故 $e^{-nx} < \frac{2}{n^2 x^2}$, 于是, $|x^2 e^{-nx}| < \frac{2}{n^2}$, 此式对 $x=0$ 也成立.

又因 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$ 当 $0 \leq x < +\infty$ 时一致收敛.

(12) 由于 $x^2 + n^3 \geq 2n^{\frac{3}{2}} |x|$, 故 $\left| \frac{x}{x^2 + n^3} \right| \leq \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$. 当 n 充分大 ($n \geq n_0$) 时, 对于 $|x| < +\infty$, 有

$$\left| \arctan \frac{2x}{x^2 + n^3} \right| = \left| \frac{2x}{x^2 + n^3} + O\left(\left(\frac{2x}{x^2 + n^3}\right)^2\right) \right| \leq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

又因 $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 及 $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ 均收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{x}{x^2 + n^3}$ 当 $|x| < +\infty$ 时一致收敛.

研究下列函数项级数在指定区间上的一致收敛性:

【2775】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$; (1) 在闭区间 $\epsilon \leq x \leq 2\pi - \epsilon$ 上, 其中 $\epsilon > 0$; (2) 在闭区间 $0 \leq x \leq 2\pi$ 上.

解 (1) 当 $\epsilon \leq x \leq 2\pi - \epsilon$ 时,

$$\left| \sum_{k=1}^n \sin kx \right| \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|} \leq \frac{1}{\sin \frac{\epsilon}{2}}.$$

又 $\frac{1}{n}$ 趋于零并且不依赖于 x , 故由狄利克雷判别法知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 在 $[\epsilon, 2\pi - \epsilon]$ 上一致收敛.

(2) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 在 $[0, 2\pi]$ 上条件收敛^{*}, 但它不一致收敛, 这可用反证法获证. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上一致收敛, 其中 $u_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$ ($n=1, 2, \dots$). 则应有: 任给 $\epsilon > 0$, 例如, 取 $\epsilon = \frac{1}{4}$, 必存在 $N_1 = N_1(\epsilon)$ (它与 x 无关), 使当 $n \geq N_1$, 对于 $[0, 2\pi]$ 上的一切 x 值, 均有

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots + u_{n+p}(x)| < \epsilon,$$

其中 p 为任意正整数. 取 $N_2 \geq 2N_1$, 记

$$n_0 = \max\left(\left[\frac{N_2}{2}\right], \left[\frac{N_2+1}{2}\right]\right),$$

则 $n_0 \geq N_1$, 又取 p 使 $n_0 + p = N_2 + 1$, 则应有

$$|u_{n_0+1}(x) + u_{n_0+2}(x) + \dots + u_{n_0+p}(x)| < \epsilon,$$

也即有

$$\left| \sum_{\frac{N_2}{2}+1 \leq n < N_2+2} u_n(x) \right| < \epsilon = \frac{1}{4} \quad (x \in [0, 2\pi]). \quad (1')$$

今取 $x_0 = \frac{1}{N_2+2} \cdot \frac{\pi}{2}$, 当然上式(1')也应成立. 但是另一方面, 由于当 $\frac{N_2}{2}+1 \leq n < N_2+2$ 时, 显然有 $0 < nx_0 < \frac{\pi}{2}$, 故有 $\sin nx_0 \geq nx_0 \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{n}{N_2+2}$. 于是, $u_n(x_0) = \frac{\sin nx_0}{n} \geq \frac{1}{N_2+2}$, 从而有

$$\sum_{\frac{N_2}{2}+1 \leq n < N_2+2} u_n(x_0) \geq \frac{1}{N_2+2} \sum_{\frac{N_2}{2}+1 \leq n < N_2+2} 1 \geq \frac{1}{N_2+2} \cdot \frac{1}{2}(N_2+2) = \frac{1}{2},$$

它与(1')中当 $x=x_0$ 时相矛盾. 这就证明了级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 在 $[0, 2\pi]$ 上条件收敛而不一致收敛的结论.

*) 利用 2698 题的结果.

【2776】 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n x}; 0 < x < +\infty.$

解 记 $u_n(x) = 2^n \sin \frac{1}{3^n x} (n=1, 2, \dots)$, 当 $0 < x < +\infty$ 时, 由于

$$|u_n(x)| \leq 2^n \cdot \frac{1}{3^n x} = \frac{1}{x} \left(\frac{2}{3} \right)^n,$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x} \left(\frac{2}{3} \right)^n$ 收敛, 故原级数绝对收敛, 从而收敛. 但它在 $(0, +\infty)$ 内并不一致收敛. 如若不然, 即设它一致收敛, 则对任给 $\epsilon > 0$, 例如, 取 $\epsilon = 1$, 必存在 $N = N(\epsilon)$ (它与 x 无关), 使当 $n \geq N$ 时, 对于 $(0, +\infty)$ 内的一切 x 值, 均有

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots + u_{n+p}(x)| < \epsilon,$$

其中 p 为任意正整数. 今取 $p=1, n=N$, 则对于一切 $x \in (0, +\infty)$, 应有

$$|u_{N+1}(x)| < \epsilon = 1.$$

又取 $x_0 = \frac{2}{3^{N+1}\pi} \in (0, +\infty)$, 则也应有 $|u_{N+1}(x_0)| < 1$. 但事实上却有

$$u_{N+1}(x_0) = 2^{N+1} \sin \frac{1}{3^{N+1}x_0} = 2^{N+1} \sin \frac{\pi}{2} = 2^{N+1} > 1,$$

这与 $|u_{N+1}(x_0)| < 1$ 矛盾. 证毕.

【2777】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}; 0 < x < +\infty.$

提示 利用狄利克雷判别法.

解 $\left| \sum_{k=1}^n (-1)^k \right| \leq 1$. 当 $0 < x < +\infty$ 时, $\frac{1}{n+x} < \frac{1}{n}$, 它单调一致地趋于零. 因此, 由狄利克雷判别法

知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$ 当 $0 < x < +\infty$ 时一致收敛.

【2778】 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\sin x}; 0 \leq x \leq 2\pi.$

提示 利用狄利克雷判别法.

解 当 $0 \leq x \leq 2\pi$ 时, 显然 $\frac{1}{n+\sin x}$ 对于 n 单调递减, 同时由于 $0 < \frac{1}{n+\sin x} < \frac{1}{n-1}$, 故当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{n+\sin x}$ 在 $0 \leq x \leq 2\pi$ 上一致地趋于零. 又由于 $\left| \sum_{k=1}^n (-1)^k \right| \leq 1$, 故级数在 $[0, 2\pi]$ 上一致收敛.

【2779】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\sqrt[3]{n^2+e^x}}; |x| \leq 10.$

解 $\left| \sum_{k=1}^n (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \right| \leq 2$, 记 $b_n(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+e^x}}$, 由于

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+e^x}} > \frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2+e^x}},$$

故 $b_n(x)$ 单调下降. 又由于

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+e^x}} < \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \rightarrow 0 \quad (|x| \leq 10),$$

故 $b_n(x)$ 单调一致地趋于零. 因此, 由狄利克雷判别法知, 级数在 $[-10, 10]$ 上一致收敛.

【2780】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{\sqrt{n^2+x^2}}; -\infty < x < +\infty.$

解 $\left| \sum_{k=1}^n \cos \frac{2k\pi}{3} \right| \leq \left| \frac{1}{\sin \frac{\pi}{3}} \right| = \frac{2}{\sqrt{3}}.$ 又 $\frac{1}{\sqrt{n^2+x^2}}$ 对于每一个 $x \in (-\infty, +\infty)$ 都是单调递减的, 且

由于 $\frac{1}{\sqrt{n^2+x^2}} \leq \frac{1}{n}$, 故对每一个 x 一致地趋于零. 因此, 由狄利克雷判别法知, 级数在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.

【2781】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x \sin nx}{\sqrt{n+x}}; 0 \leq x < +\infty.$

解 当 $x = 2m\pi$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) 时, $\sum_{k=1}^n \sin x \sin kx = 0.$ 当 $x \neq 2m\pi$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) 时,

$$\left| \sum_{k=1}^n \sin x \sin kx \right| = |\sin x| \cdot \left| \sum_{k=1}^n \sin kx \right| \leq |\sin x| \cdot \left| \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \right| = 2 \left| \cos \frac{x}{2} \right| \leq 2.$$

于是, 对于一切 $x \in [0, +\infty)$, 均有

$$\left| \sum_{k=1}^n \sin x \sin kx \right| \leq 2.$$

又 $\frac{1}{\sqrt{n+x}}$ 对于每一个 $x \in [0, +\infty)$ 关于 n 都是单调递减的, 且由 $\frac{1}{\sqrt{n+x}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ 知, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{\sqrt{n+x}}$ 关于 x 在 $0 \leq x < +\infty$ 上一致地趋于零. 因此, 由狄利克雷判别法知, 级数在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛.

【2782】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{\sqrt{n(n+x)}}; 0 \leq x < +\infty.$

提示 注意 $\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{\sqrt{n(n+x)}} = \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{x}{n}}}$, 并利用 2672 题的结果及阿贝尔判别法.

解 $\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{\sqrt{n(n+x)}} = \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{x}{n}}}.$ 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ 收敛, 且与 x 无关, 故它对 x 而言是一致

收敛的.

另一方面, $\frac{1}{\sqrt{1+\frac{x}{n}}}$ 对于每一个 $x \in [0, +\infty)$ 都是单调递减的且有界: $\left| \frac{1}{\sqrt{1+\frac{x}{n}}} \right| \leq 1.$

因此, 由阿贝尔判别法知, 原级数在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛.

*) 利用 2672 题的结果.

【2783】 不连续函数序列可否一致收敛于连续函数?

解题思路 可以. 例如, 函数序列 $f_n(x) = \frac{1}{n} \varphi(x)$, 其中

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ 为无理数,} \\ 1, & x \text{ 为有理数.} \end{cases}$$

利用 734 题的结果, 可知 $f_n(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上每一点均不连续, 但它在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛于连续

函数 $f(x)=0$.

解 可以. 例如, 函数序列

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \varphi(x) \quad (n=1, 2, \dots), \quad \text{其中} \quad \varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ 为无理数,} \\ 1, & x \text{ 为有理数.} \end{cases}$$

显然, $f_n(x)$ 在 $-\infty < x < +\infty$ 上每一点均不连续, 但由于

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n} \quad (n=1, 2, \dots; -\infty < x < +\infty),$$

故当 $n \rightarrow \infty$ 时, $f_n(x)$ 在 $-\infty < x < +\infty$ 上一致趋于零. 而 $f(x) \equiv 0$ ($-\infty < x < +\infty$) 显然是连续函数. 此例说明, 不连续函数的序列仍然可以一致收敛于连续函数.

【2784】 证明: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上也一致收敛.

提示 由柯西准则并注意不等式

$$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots + f_{n+p}(x)| \leq |f_{n+1}(x)| + |f_{n+2}(x)| + \dots + |f_{n+p}(x)|,$$

命题即可获证.

证 由柯西准则及题设知: 对于任给的 $\epsilon > 0$, 存在 $N = N(\epsilon)$, 使当 $n > N$ 时, 对于 $[a, b]$ 上的一切 x 值, 均有

$$|f_{n+1}(x)| + |f_{n+2}(x)| + \dots + |f_{n+p}(x)| < \epsilon,$$

其中 p 为任意正整数. 由于

$$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots + f_{n+p}(x)| \leq |f_{n+1}(x)| + |f_{n+2}(x)| + \dots + |f_{n+p}(x)| < \epsilon,$$

故根据一致收敛的柯西准则知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛.

【2785】 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上绝对并一致收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ 在 $[a, b]$ 上是否必定一致收敛?

解 未必. 例如, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1-x)x^n$ 在 $[0, 1]$ 上绝对并一致收敛, 但其绝对值级数不一致收敛. 事实上, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n (1-x)x^n| = \sum_{n=1}^{\infty} (1-x)x^n$$

在 $[0, 1]$ 上收敛而不一致收敛^{*)}. 因此, 我们只要证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1-x)x^n$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛就可以了.

首先, 当 $x=0$ 及 $x=1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1-x)x^n$ 显然收敛. 当 $0 < x < 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1-x)x^n = (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n$ 是交错级数且满足莱布尼茨条件, 故也收敛. 要证其一致收敛, 只要证其余式 $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k (1-x)x^k$ 一致趋于零 (对 $0 \leq x \leq 1$) 即可. 按满足莱布尼茨条件的交错级数的余式估计, 有

$$|R_n(x)| \leq (1-x)x^{n+1} \quad (0 \leq x \leq 1). \quad (1)$$

令 $f(x) = (1-x)x^{n+1}$, 通过求导数易知此函数在 $x = \frac{n+1}{n+2}$ 时达到其在 $0 \leq x \leq 1$ 上的最大值, 故当 $0 \leq x \leq 1$ 时, 恒有

$$0 \leq f(x) \leq f\left(\frac{n+1}{n+2}\right) = \frac{1}{n+2} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} < \frac{1}{n+2}.$$

于是, 由 (1) 式知

$$|R_n(x)| < \frac{1}{n+2} \quad (0 \leq x \leq 1; n=1, 2, \dots).$$

由此即知,当 $n \rightarrow \infty$ 时 $R_n(x)$ 关于 $0 \leq x \leq 1$ 一致趋于零.

*) 利用 2769 题的结果.

【2786】 证明:绝对收敛且一致收敛的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad (0 \leq x \leq 1),$$

其中

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 2^{-(n+1)}, \\ \frac{1}{n} \sin^2(2^{n+1} \pi x), & 2^{-(n+1)} < x < 2^{-n}, \\ 0, & 2^{-n} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

不能用非负项的收敛数项级数作为其强级数.

证 首先指出 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上是一致收敛的. 事实上, 当 $n \geq N$ 时, 柯西余项函数为

$$R_{N,p}(x) = f_{N+1}(x) + f_{N+2}(x) + \cdots + f_{N+p}(x).$$

于是, 当 $x \in [0, 1]$ 时, 有

$$R_{N,p}(x) = \begin{cases} \frac{1}{N+1} \sin^2(2^{N+2} \pi x), & x \in (2^{-(N+2)}, 2^{-(N+1)}), \\ \frac{1}{N+2} \sin^2(2^{N+3} \pi x), & x \in (2^{-(N+3)}, 2^{-(N+2)}), \\ \vdots \\ \frac{1}{N+p} \sin^2(2^{N+p} \pi x), & x \in (2^{-(N+p)}, 2^{-(N+p-1)}), \\ 0, & \text{其他点 } x, \end{cases}$$

因此, 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, 恒有

$$|R_{N,p}(x)| < \frac{1}{N}.$$

由此即知: 对于任给的 $\epsilon > 0$, 只要取 $N = [\frac{1}{\epsilon}]$, 则当 $n > N$ 时, 对于 $[0, 1]$ 上的一切 x 值, 均有 $|R_{N,p}(x)| < \epsilon$,

其中 p 为任意正整数. 由柯西准则知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上绝对收敛且一致收敛. 下面证明: 不可能用

某非负项收敛数项级数作为其强级数. 采用反证法, 假设有某收敛的强级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 其中 $a_n \geq 0$ 是常数, 即在 $[0, 1]$ 上有

$$|f_n(x)| \leq a_n \quad (n=1, 2, \cdots), \quad (1)$$

且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 以下将说明由此引出矛盾. 事实上, 据 (1) 式对一切 $x \in [0, 1]$ 均成立. 今取 $x_n = \frac{3}{2} 2^{-(n+1)}$, 显然有 $2^{-(n+1)} < x_n < 2^{-n}$. 因此得

$$a_n \geq |f_n(x_n)| = \frac{1}{n} \sin^2(2^{n+1} \pi x_n) = \frac{1}{n} > 0.$$

由 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛得知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 也应收敛, 这与众所周知的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 的发散结论相抵触. 证毕.

【2787】 证明: 若函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$ 的各项是闭区间 $[a, b]$ 上的单调函数, 此级数在闭区间 $[a, b]$ 的两个端点绝对收敛, 则此级数在闭区间 $[a, b]$ 上绝对并一致收敛.

证明思路 由题设, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(a)|$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(b)|$ 均收敛. 令 $a_n = \max\{|\varphi_n(a)|, |\varphi_n(b)|\}$, 则可知

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 又由

$$|\varphi_n(x)| \leq a_n \quad (a \leq x \leq b; n=1,2,\dots),$$

利用魏尔斯特拉斯判别法,命题即获证.

证 按题设, $\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(a)|$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(b)|$ 均收敛. 令 $a_n = \max(|\varphi_n(a)|, |\varphi_n(b)|)$, 由于 $0 \leq a_n \leq |\varphi_n(a)| + |\varphi_n(b)|$, 故知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 由于 $\varphi_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上是单调的, 故

$$|\varphi_n(x)| \leq a_n \quad (a \leq x \leq b; n=1,2,\dots).$$

由魏尔斯特拉斯判别法知,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上绝对并一致收敛.

【2788】 证明:幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在全部位于其收敛区间内的任何闭区间上一致收敛.

证明思路 设幂级数的收敛区间为 $(-R, R)$ ($R > 0$), $[a, b] \subset (-R, R)$.

令 $r = \max(|a|, |b|)$, 则 $|a_n x^n| \leq |a_n r^n|$. 并利用魏尔斯特拉斯判别法.

证 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛区间为 $(-R, R)$ ($R > 0$), $[a, b] \subset (-R, R)$. 令

$$r = \max(|a|, |b|),$$

则当 $x \in [a, b]$ 时, 有

$$|a_n x^n| \leq |a_n| \cdot |r|^n = |a_n r^n|.$$

由题设知 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n r^n|$ 收敛, 故原幂级数在 $[a, b]$ 上绝对并一致收敛, 由 $[a, b]$ 的任意性, 本题获证.

【2789】 设 $a_n \rightarrow \infty$ 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{a_n} \right|$ 收敛. 证明:级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x - a_n}$ 在不包含点 a_n ($n=1,2,\dots$) 的任何有界闭集合上绝对并一致收敛.

证明思路 设 E 为任一不包含点 a_n ($n=1,2,\dots$) 的有界闭集, 则存在常数 $M > 0$, 当 $x \in E$ 时, 有 $|x| \leq M$ 及 $\left| \frac{x}{a_n} \right| \neq 1$ ($n=1,2,\dots$). 由题设知, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|a_n|} = 0$, 故存在正整数 N , 使当 $n > N$ 且 $x \in E$ 时, 有 $\left| \frac{x}{a_n} \right| < \frac{1}{2}$. 于是, 当 $n > N$ 时, 可证

$$\left| \frac{1}{x - a_n} \right| \leq \frac{2}{|a_n|},$$

由题设, 并利用魏尔斯特拉斯判别法, 命题即可获证.

证 设 E 是任一不包含点 a_n ($n=1,2,\dots$) 的有界闭集, 则存在常数 $M > 0$, 当 $x \in E$ 时有

$$|x| \leq M \quad \text{且} \quad \left| \frac{x}{a_n} \right| \neq 1 \quad (n=1,2,\dots).$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{a_n} \right|$ 收敛, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|a_n|} = 0$. 因此, 存在 N , 使当 $n > N$, $x \in E$ 时,

$$\left| \frac{x}{a_n} \right| < \frac{1}{2}.$$

于是, 当 $n > N$ 时, 有

$$\left| \frac{1}{x - a_n} \right| = \frac{1}{|a_n|} \cdot \frac{1}{\left| 1 - \frac{x}{a_n} \right|} \leq \frac{1}{|a_n|} \cdot \frac{1}{1 - \left| \frac{x}{a_n} \right|} \leq \frac{1}{|a_n|} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{|a_n|}.$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{|a_n|}$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{x - a_n} \right|$ 在 E 上绝对并一致收敛.

【2790】 证明:若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则狄利克雷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ 当 $x \geq 0$ 时一致收敛.

提示 利用阿贝尔判别法.

证 $0 < \frac{1}{n^x} \leq 1$, 且 $\frac{1}{n^x}$ 对每一个 $x \geq 0$ 是单调的. 又 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 当 $x \geq 0$ 时一致收敛, 故由阿贝尔判别法知, 级

数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ 当 $x \geq 0$ 时一致收敛.

【2791】 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx}$ 在区域 $x \geq 0$ 内一致收敛.

提示 利用阿贝尔判别法.

证 $0 < e^{-nx} \leq 1$, 且 e^{-nx} 对每一个 $x \geq 0$ 是单调的. 又 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 当 $x \geq 0$ 时一致收敛, 故由阿贝尔判别法知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx}$ 当 $x \geq 0$ 时一致收敛.

【2792】 证明: 函数 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ 在区域 $-\infty < x < +\infty$ 内连续并有连续的导数.

证明思路 首先, 证明函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续. 只需注意 $\left| \frac{\sin nx}{n^3} \right| \leq \frac{1}{n^3}$ 及 $\frac{\sin nx}{n^3}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内的连续性, 利用函数项级数一致收敛的性质 1), 即知 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

其次, 再证导数 $f'(x)$ 连续. 注意 $\frac{d}{dx} \left(\frac{\sin nx}{n^3} \right) = \frac{\cos nx}{n^2}$, 仿前半段的证明, 即知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ 的和在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 且由性质 3) 有

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin nx}{n^3} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}.$$

证 首先证明 $f(x)$ 连续. 事实上, 由 $\left| \frac{\sin nx}{n^3} \right| \leq \frac{1}{n^3}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ 的收敛性即知, 原级数当 $-\infty < x < +\infty$ 时一致收敛. 又由于 $\frac{\sin nx}{n^3}$ 在域 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ 的和 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

其次再证明 $f'(x)$ 连续. 由于 $\frac{d}{dx} \left(\frac{\sin nx}{n^3} \right) = \frac{\cos nx}{n^2}$ 连续, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ 当 $-\infty < x < +\infty$ 时一致收敛, 故再次根据函数项级数一致收敛的性质, 即知上述级数的和在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 且有

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}.$$

【2793】 证明: 函数

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n-x)^2}$$

(1) 在除整数点 $x=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 外的一切点有定义并且连续; (2) 为周期函数, 其周期等于 1.

证 考虑级数 (1') $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n-x)^2}$ 及 (2') $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-n-x)^2}$. 显然, 当 $x \neq k$ ($k=0, 1, 2, \dots$) 时, 级数 (1') 收敛; 当 $x \neq -l$ ($l=1, 2, \dots$) 时, 级数 (2') 收敛. 因此, 当 $x \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 时, 级数 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n-x)^2}$ 收敛.

(1) 因而在除 $x=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 外的一切点上 $f(x)$ 有定义. 下面为了证明 $f(x)$ 在任一点 $x=x_0$ ($x_0 \neq k, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 处 $f(x)$ 连续, 我们可以在 $[x_0], [x_0]+1$ 内考虑一个包含 x_0 的区间 $[a, b]$:

$$[x_0] < a < x_0 < b < [x_0] + 1.$$

记 $p = \max(|a|, |b|)$. 在 $[a, b]$ 上考虑级数 (1') 及 (2'). 当 n 适当大时 (例如 $n \geq n_0$), 由于

$$\left| \frac{1}{(n-x)^2} \right| \leq \frac{1}{(n-|x|)^2} \leq \frac{1}{(n-p)^2}, \quad \left| \frac{1}{(-n-x)^2} \right| \leq \frac{1}{(n-|x|)^2} \leq \frac{1}{(n-p)^2},$$

且 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n-p)^2}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{(n-x)^2}$ 及 $\sum_{n=-n_0}^{+\infty} \frac{1}{(-n-x)^2}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛. 从而, 级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n-x)^2}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-n-x)^2}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛, 也即 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n-x)^2}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛. 于是, 其和函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 因而 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

(2) 当 $x \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 时, 有

$$f(x+1) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{[n-(x+1)]^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{[(n-1)-x]^2},$$

作指标交换 $m=n-1$, 则当 $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 时有 $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$. 因而得

$$f(x+1) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(m-x)^2} = f(x),$$

上式表明, 当 $x \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 时, $f(x)$ 是一个以 1 为周期的周期函数. 证毕.

【2794】 证明: 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} [nxe^{-nx} - (n-1)xe^{-(n-1)x}]$$

在闭区间 $0 \leq x \leq 1$ 上收敛但不一致收敛, 而它的和是此区间上的连续函数.

证 考虑部分和

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n [kxe^{-kx} - (k-1)xe^{-(k-1)x}] = nxe^{-nx},$$

显然, 在 $[0, 1]$ 上其极限函数 $S(x)$ 存在 (即级数的和) 且连续:

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = 0.$$

但此级数在 $[0, 1]$ 上不一致收敛. 用反证法. 若不然, 即若一致收敛, 则对任给的 $\epsilon > 0$, 存在数 $N = N(\epsilon)$, 使

当 $n \geq N$ 时, 对于 $[0, 1]$ 上的一切 x 值, 均有 $|S_n(x) - S(x)| < \epsilon$. 今取 $\epsilon_0 = \frac{1}{2}e^{-1}$, 应有

$$|S_n(x) - S(x)| < \frac{1}{2}e^{-1}.$$

取 $x = x_0 = \frac{1}{n}$, 则也应有 $|S_n(x) - S(x)| < \frac{1}{2}e^{-1}$. 但另一方面, 却有

$$|S_n(x_0) - S(x_0)| = S_n(x_0) = e^{-1} > \epsilon_0,$$

矛盾, 证毕.

【2795】 确定函数 $f(x)$ 的存在域并研究它们的连续性, 设

$$(1) f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(x + \frac{1}{n}\right)^n; \quad (2) f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x + (-1)^n n}{x^2 + n^2}; \quad (3) f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n}.$$

解 (1) 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(x + \frac{1}{n}\right)^n} = |x|$, 故当 $|x| < 1$ 时, 级数绝对收敛; 而当 $|x| > 1$ 时, 级数发散. 当 $|x| = 1$ 时, 通项不趋于零, 因而级数也发散. 于是, $f(x)$ 的存在域为 $(-1, 1)$. 下面证明 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内连续. 设 $0 < \delta < 1$, 则当 $|x| \leq 1 - \delta$ 时, 有

$$\left|x + \frac{1}{n}\right| \leq \left(1 - \delta + \frac{1}{n}\right).$$

上面已证级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \delta + \frac{1}{n}\right)^n$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(x + \frac{1}{n}\right)^n$ 在 $[-1 + \delta, 1 - \delta]$ 上一致收敛, 从而, $f(x)$ 在该区间上连续. 由于 δ 可以任意的小, 故知 $f(x)$ 在开区间 $(-1, 1)$ 内连续.

(2) $\frac{x + n(-1)^n}{x^2 + n^2} = \frac{x}{x^2 + n^2} + (-1)^n \frac{n}{x^2 + n^2}$. 由狄利克雷判别法易知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{x^2 + n^2}$ 在整个数

轴上一致收敛, 故其和函数在整个数轴上连续. 又对于任意的 $M > 0$, 当 $x \in [-M, M]$ 时, 由于 $\left|\frac{x}{x^2 + n^2}\right| \leq \frac{M}{n^2}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{n^2}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2 + n^2}$ 在 $[-M, M]$ 上一致收敛, 从而, 其和函数在 $[-M, M]$ 上连续. 由 M 的任意性知, 上述和函数在整个数轴上连续.

于是, 作为这两个级数的和 $f(x)$ 在整个数轴上有定义且是连续的.

(3) 由于当 $-\infty < x < +\infty$ 且 $x \neq 0$ 时, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|x|}{(1+x^2)^n}} = \frac{1}{1+x^2} < 1,$$

故此时级数绝对收敛, 显然当 $x=0$ 时级数收敛于零, 于是, $f(x)$ 的存在域为 $(-\infty, +\infty)$.

注意在任一点 $x_0 \neq 0$ 上, 例如, 当 $x_0 > 0$ 时, 我们可选 a, b 使 $0 < a < x_0 < b$, 考虑 $x \in [a, b]$, 显然有

$$\left| \frac{x}{(1+x^2)^n} \right| \leq \frac{b}{(1+a^2)^n}.$$

但 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b}{(1+a^2)^n}$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛. 注意每一个 $\frac{x}{(1+x^2)^n}$ 连续, 因而和函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续. 于是, $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续 (对于 $x_0 < 0$ 的情况可同理证明), 因而易得

$$f(x) = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} = \frac{x}{1+x^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{1+x^2}} = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0).$$

由此可见 $f(x) = \begin{cases} 0, & x=0, \\ \frac{1}{x}, & x \neq 0, \end{cases}$ 即和函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续, 而在 $x \neq 0$ 处连续.

【2796】 设 $r_k (k=1, 2, \dots)$ 是闭区间 $[0, 1]$ 上的有理数. 证明函数

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x-r_k|}{3^k} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

具有下列性质: (1) 连续; (2) 在无理点可微而在有理点不可微.

证 (1) 由于当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $\left| \frac{x-r_k}{3^k} \right| \leq \frac{1}{3^k}$ 且 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k}$ 收敛, 故原级数在 $[0, 1]$ 上一致收敛, 又 $\frac{|x-r_k|}{3^k}$ 连续, 故和函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续.

(2) 先设 x_0 为 $[0, 1]$ 中的无理点. 当 $x \neq x_0$ 时, 我们有

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(x), \quad (1')$$

其中 $v_k(x) = \frac{|x-r_k| - |x_0-r_k|}{3^k(x-x_0)}$ ($k=1, 2, \dots$). 由于

$$||x-r_k| - |x_0-r_k|| \leq |(x-r_k) - (x_0-r_k)| = |x-x_0|,$$

故 $|v_k(x)| \leq \frac{1}{3^k} (x \neq x_0)$. 由此可知, 级数 $\sum_{k=1}^{\infty} v_k(x)$ 在 $0 \leq x \leq 1, x \neq x_0$ 上一致收敛. 此外, 对于每个固定的 k , 由于 $x_0 \neq r_k$, 故当 x 与 x_0 充分近时, $(x-r_k)$ 必与 (x_0-r_k) 同号, 由此易知

$$\lim_{x \rightarrow x_0} v_k(x) = \frac{1}{3^k} \operatorname{sgn}(x_0 - r_k) \quad (k=1, 2, \dots).$$

从而, 当 $x \rightarrow x_0$ 时, 级数 $\sum_{k=1}^{\infty} v_k(x)$ 可逐项求极限, 再根据 (1') 式即得

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{k=1}^{\infty} v_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} v_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} \operatorname{sgn}(x_0 - r_k).$$

由此可知, $f(x)$ 在点 x_0 可微且 $f'(x_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} \operatorname{sgn}(x_0 - r_k)$.

现设 x_0 是 $[0, 1]$ 中的一个有理点, 于是, $x_0 = r_m$, m 为某正整数. 这时, (1') 式为: 当 $x \neq x_0$ 时,

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = v_m(x) + \sum_{k \neq m} v_k(x), \quad (2')$$

其中

$$v_m(x) = \frac{|x-r_m| - |x_0-r_m|}{3^m(x-x_0)} = \frac{|x-x_0|}{3^m(x-x_0)} = \frac{1}{3^m} \operatorname{sgn}(x-x_0).$$

仿前段之证, 可知: 当 $x \rightarrow x_0$ 时, 级数 $\sum_{k \neq m} v_k(x)$ 可逐项取极限, 得

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{k \neq m} v_k(x) = \sum_{k \neq m} \lim_{x \rightarrow x_0} v_k(x) = \sum_{k \neq m} \frac{1}{3^k} \operatorname{sgn}(x_0 - r_k).$$

由于显然 $\lim_{x \rightarrow x_0+0} v_m(x) = \frac{1}{3^m}$, $\lim_{x \rightarrow x_0-0} v_m(x) = -\frac{1}{3^m}$, 故极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} v_m(x)$ 不存在. 于是, 根据(2')式即知极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 不存在, 故 $f(x)$ 在点 x_0 不可微. 证毕.

【2797】 证明:黎曼 ζ 函数 $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ 在区域 $x > 1$ 内是连续的并且在此区域内有连续的各阶导数.

证 显然级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ 当 $x > 1$ 时收敛. 各项求导数所得级数为 $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}$. 下证它在 $1 < a \leq x < +\infty$ 上一致收敛(a 为大于1的任何数). 事实上, 当 $a \leq x < +\infty$ 时, 有

$$0 < \frac{\ln n}{n^x} \leq \frac{\ln n}{n^a},$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^a}$ 收敛(这是由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\ln n}{n^a}}{\frac{1}{n^{\frac{a+1}{2}}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^{\frac{a+1}{2}}} = 0$, 而 $\frac{a+1}{2} > 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{a+1}{2}}}$ 收敛), 故知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}$ 在

$a \leq x < +\infty$ 上一致收敛. 再注意到每项 $\frac{\ln n}{n^x}$ 都是 x 的连续函数, 即知, 在 $a \leq x < +\infty$ 上可逐项求导数, 得

$$\zeta'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}, \quad (1)$$

并且 $\zeta'(x)$ 在 $a \leq x < +\infty$ 上连续. 再由 $a > 1$ 的任意性即知(1)式对一切 $1 < x < +\infty$ 成立, 并且 $\zeta'(x)$ 在 $1 < x < +\infty$ 上连续. 当然 $\zeta(x)$ 更在 $1 < x < +\infty$ 上连续.

利用数学归纳法, 并注意到对任何正整数 k , 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^k}{n^a}$ ($a > 1$) 都收敛, 仿照上述, 可证: 对任何正整数 k , $\zeta^{(k)}(x)$ 在 $1 < x < +\infty$ 上都存在且连续, 并且可由原级数逐项求导数 k 次而得:

$$\zeta^{(k)}(x) = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^k}{n^x} \quad (1 < x < +\infty).$$

【2798】 证明: θ 函数 $\theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x}$ 当 $x > 0$ 时有定义并无穷多次可微.

证 首先, 我们证明 $\theta(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有定义且可微.

在级数 $\theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n(x)$ 中, $u_n(x) = e^{-\pi n^2 x}$ 显然有 $u_{-n}(x) = u_n(x)$, 故只要考虑级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x}$ ($x > 0$) 即可. 对于每一个 $x > 0$ 及充分大的 n , 有

$$0 < e^{-\pi n^2 x} < \frac{1}{n^2 x},$$

而级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 x}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x}$ 收敛. 对此级数逐项求导后, 得级数 $-\sum_{n=1}^{+\infty} \pi n^2 e^{-\pi n^2 x}$, 它在 $[\epsilon, +\infty)$ 内是一致收敛的(ϵ 为任意正数). 事实上, 当 n 充分大时, 对一切 $\epsilon \leq x < +\infty$, 均有

$$0 < \pi n^2 e^{-\pi n^2 x} \leq \pi n^2 e^{-\pi n^2 \epsilon} < \frac{1}{n^2 \epsilon},$$

而 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \epsilon}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \pi n^2 e^{-\pi n^2 x}$ 在 $\epsilon \leq x < +\infty$ 上一致收敛. 再注意到各项都是连续函数, 即知级数 $\theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x}$ 在 $[\epsilon, +\infty)$ 内连续可微, 且可逐项求导数. 由 $\epsilon > 0$ 的任意性知, $\theta(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续可微且可逐项求导数.

其次, 仿照前段可证明 $\theta'(x)$ 的可微性.

再次, 利用数学归纳法, 并注意到当 n 充分大时, 对于一切 $x \in [\epsilon, +\infty)$, 均有

$$0 < (\pi n^2)^k e^{-\pi n^2 x} < \frac{1}{n^2 \epsilon},$$

仿照前段可证明 $\theta(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内可微分 k 次, 其中 k 为任意正整数, 从而, $\theta(x)$ 当 $x > 0$ 时无穷多次可微.

【2799】 确定函数 $f(x)$ 的存在域并研究它们的可微性, 设:

$$(1) f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n+x}; \quad (2) f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{n^2+x^2}.$$

解 (1) 易知当 $x \neq -k (k=1, 2, \dots)$ 时, 级数是莱布尼茨型, 因而收敛. 任取 $x = x_0, x_0 \neq -k (k=1, 2, \dots)$.

(I) 当 $x_0 \geq 0$, 取 $\beta \geq x_0$, 则 $x_0 \in [-\frac{1}{2}, \beta]$. 在区间 $[-\frac{1}{2}, \beta]$ 上, 注意 $u_n(x) = \frac{(-1)^n x}{n+x}$, 有

$$u'_n(x) = \frac{(-1)^n n}{(n+x)^2} \quad (n=1, 2, \dots)$$

且连续. $\frac{n}{(n+x)^2}$ 随 n 单调下降且一致趋于零, 事实上, 当 $x \in [-\frac{1}{2}, \beta], n > 1$ 时, 有

$$\left| \frac{n}{(n+x)^2} \right| \leq \frac{n}{(n-1)^2} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty);$$

显然 $\sum_{k=1}^n (-1)^k$ 有界 (小于或等于 1). 因此, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ 在 $[0, \beta]$ 上一致收敛. 从而,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n+x}$$

在 $[0, \beta]$ 上可微, 当然它在 $x = x_0$ 点可微.

(II) 当 $x_0 < 0$ 时, 必有 k_0 , 使 $-(k_0+1) < x_0 < -k_0$. 今选取 α, β 使

$$-(k_0+1) < \alpha < x_0 < \beta < -k_0.$$

在区间 $[\alpha, \beta]$ 上, $u'_n(x) = \frac{(-1)^n n}{(n+x)^2}$ 连续且随 n 单调下降, 并且一致趋于零 (考虑充分大的 n):

$$\left| \frac{n}{(n+x)^2} \right| = \frac{n}{n^2+2nx+x^2} \leq \frac{n}{n^2-2n|\alpha|} \leq \frac{n}{n^2-2n|\alpha|} = \frac{1}{n-2|\alpha|} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

又显然知 $\sum_{k=1}^n (-1)^k$ 有界, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上一致收敛. 因而,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n+x}$$

在 $[\alpha, \beta]$ 上可微, 当然它在 $x = x_0$ 点可微.

总之, 函数 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n+x}$ 在 $x \neq -k (k=1, 2, \dots)$ 上有定义且可微.

(2) 当 $x=0$ 时, 级数显然收敛. 当 $x \neq 0$ 时, 由于

$$\frac{\frac{|x|}{n^2+x^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{n^2+x^2} |x| \rightarrow |x| \quad (n \rightarrow \infty),$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{n^2+x^2}$ 当 $x \neq 0$ 时也收敛. 从而可知, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{n^2+x^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上收敛. 令

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2},$$

显然它在 $(-\infty, +\infty)$ 上收敛, 故可记 $f(x) = |x| \varphi(x)$. 任取 $x_0 \in (-\infty, +\infty)$, 则有 $l > 0$ 使 $-l < x_0 < l$. 当 $x \in [-l, l]$ 时, 由于

$$\left| \left(\frac{1}{n^2+x^2} \right)' \right| = \left| \frac{-2x}{(n^2+x^2)^2} \right| \leq \frac{2l}{n^4} \quad (n=1, 2, \dots),$$

且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2l}{n^4}$ 收敛. 因此, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2+x^2} \right)'$ 在 $[-l, l]$ 上一致收敛. 从而知 $\varphi(x)$ 在 $[-l, l]$ 上可微, 当然它在 $x = x_0$ 点可微. 又因 $|x|$ 在 $x \neq 0$ 点可微, 而在 $x = 0$ 点不可微, 再注意到恒有 $\varphi(x) > 0$, 即知 $f(x) = |x| \varphi(x)$ 在 $x \neq 0$ 点可微, 而在 $x = 0$ 点不可微.

【2800】 证明: 序列 $f_n(x) = \frac{1}{n} \arctan x^n$ ($n=1, 2, \dots$) 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内一致收敛, 但

$$[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)]'_{x=1} \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(1).$$

提示 注意 $|f_n(x)| < \frac{\pi}{2n}$.

证 由于当 $x \in (-\infty, +\infty)$ 时, $|\arctan x^n| < \frac{\pi}{2}$ ($n=1, 2, \dots$), 故有

$$|f_n(x)| < \frac{\pi}{2n} \quad (n=1, 2, \dots).$$

易见 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x)$. 任给 $\epsilon > 0$, 选取 $N = \left\lceil \frac{\pi}{2\epsilon} \right\rceil$, 则当 $n > N$ 时, 对于一切的 $x \in (-\infty, +\infty)$, 均有

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\pi}{2n} \leq \frac{\pi}{2(N+1)} < \frac{\pi}{2 \cdot \frac{\pi}{2\epsilon}} = \epsilon.$$

于是, $f_n(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内一致收敛于零. 但 $f'_n(x) = \frac{x^{n-1}}{1+x^{2n}}$, 易见

$$[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)]'_{x=1} = f'(x)|_{x=1} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(1) = \frac{1}{2} \neq 0.$$

因此, 两个极限不相等. 值得注意的是, $f_n(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内一致收敛于零, 但 $f'_n(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内却不一致收敛于其极限函数:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 1, \\ \frac{1}{2}, & x = 1. \end{cases}$$

【2801】 证明: 序列 $f_n(x) = x^2 + \frac{1}{n} \sin n\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内一致收敛, 但 $[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)]' \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$.

证 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = x^2 = f(x)$. 由于当 $x \in (-\infty, +\infty)$ 时

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{1}{n} \sin n\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \right| \leq \frac{1}{n},$$

故对任给 $\epsilon > 0$, 只要取 $N = \left\lceil \frac{1}{\epsilon} \right\rceil$, 当 $n > N$ 时, 对于一切 $x \in (-\infty, +\infty)$, 就有

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内一致收敛.

其次, 由于

$$[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)]' = (x^2)' = 2x,$$

而 $f'_n(x) = 2x + \cos n\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时极限不存在, 当然有 $[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)]' \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$.

【2802】 试确定参数 α 取何值时下列命题为真:

(1) 序列

$$f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx} \quad (n=1, 2, \dots) \quad (1')$$

在闭区间 $[0, 1]$ 上收敛;

(2) 序列 $(1')$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛;

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx$ 可在积分号下取极限?

解 (1) 当 $x=0$ 时, 对于任意 α , 均有 $f_n(x)=0$; 当 $x \neq 0$ 且 $x \in (0, 1]$ 时, 对于任意 α , 均有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha x e^{-nx} = 0.$$

因此, 对于任意的 α , $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上收敛于函数 $f(x)=0$.

(2) 由于 $f'_n(x) = n^a e^{-nx} (1-nx)$, 故当 $x = \frac{1}{n}$ 时, $f'_n(x) = 0$. 又由于当 $x < \frac{1}{n}$ 时, $f'_n(x) > 0$; 当 $x > \frac{1}{n}$ 时, $f'_n(x) < 0$, 故 $x = \frac{1}{n}$ 为 $f_n(x)$ 在 $0 \leq x \leq 1$ 上的最大值点. 因此,

$$0 \leq f_n(x) \leq f_n\left(\frac{1}{n}\right) = n^{a-1} e^{-1} \quad (0 \leq x \leq 1).$$

当 $a < 1$ 且 $n \rightarrow \infty$ 时, $n^{a-1} e^{-1} \rightarrow 0$. 于是, 当 $a < 1$ 时, 对任给的 $\varepsilon > 0$, 总存在 N , 使当 $n > N$ 时, 对于一切的 $x \in [0, 1]$, 均有

$$|f_n(x) - 0| < \varepsilon,$$

即当 $a < 1$ 时, $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛于零. 当 $a \geq 1$ 时, 由于 $f_n\left(\frac{1}{n}\right) \not\rightarrow 0$, 故 $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上不一致收敛于零.

(3) 要证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx$ 可在积分号下取极限, 即只要证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 [\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)] dx. \quad (2')$$

事实上,

$$\int_0^1 [\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)] dx = \int_0^1 0 \cdot dx = 0,$$

而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} n^a \int_0^1 x e^{-nx} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} n^a \left(-\frac{1}{n} e^{-n} - \frac{1}{n^2} e^{-n} + \frac{1}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{a-2} (1 - e^{-n} - ne^{-n}).$$

要(2')式成立, 只要下式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = 0,$$

当 $a < 2$ 时成立. 于是, 当 $a < 2$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx$ 可在积分号下取极限.

【2803】 证明: 序列 $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ ($n=1, 2, \dots$) 在闭区间 $[0, 1]$ 上收敛, 但

$$\int_0^1 [\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)] dx \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx.$$

证 当 $x=0$ 时, 对于任意的 n , $f_n(x)=0$; 当 $x \neq 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)=0$. 因此, 序列 $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上收敛于零. 下证

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx \neq \int_0^1 [\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)] dx.$$

注意到

$$\int_0^1 [\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)] dx = \int_0^1 0 \cdot dx = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 nxe^{-nx^2} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-nx^2} \right) \Big|_0^1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-n} \right) = \frac{1}{2} \neq 0,$$

本题获证.

【2804】 证明: 序列 $f_n(x) = nx(1-x)^n$ ($n=1, 2, \dots$) 在闭区间 $[0, 1]$ 上收敛而不一致收敛, 但

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 [\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)] dx.$$

证明思路 先证 $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上收敛于零.

再证 $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上不一致收敛. 为此, 取 ε_0 使 $0 < \varepsilon_0 < \frac{1}{2e}$, 不论 n 多么大, 只要取 $x_n = \frac{1}{n+1}$, 就有

$$\left| f_n\left(\frac{1}{n+1}\right) - 0 \right| = \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1} \rightarrow e^{-1} \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时}).$$

最后易证 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 [\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)] dx = 0$. 从而, 命题获证.

证 先证 $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上收敛. 事实上, 当 $x=0$ 及 $x=1$ 时, 对任意的 n , 均有 $f_n(x)=0$; 而当 $0 < x < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} nx(1-x)^n = 0$. 因此, $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上收敛于零.

下证 $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上不一致收敛. 为此, 取 ε_0 使 $0 < \varepsilon_0 < \frac{1}{2e}$, 不论 n 多么大, 只要取 $x_n = \frac{1}{n+1}$, 就有

$$\left| f_n\left(\frac{1}{n+1}\right) - 0 \right| = n \cdot \frac{1}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \rightarrow e^{-1} \quad (n \rightarrow \infty).$$

那么取适当的 n_0 , 当 $n > n_0$ 时, 就有

$$|f_n(x_n)| > \frac{1}{2e} > \varepsilon_0.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上不一致收敛.

最后证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 [\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)] dx$. 注意到

$$\int_0^1 [\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)] dx = \int_0^1 0 \cdot dx = 0,$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 nx(1-x)^n dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 n(1-y)y^n dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} y^{n+1} - \frac{n}{n+2} y^{n+2} \right) \Big|_0^1 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)} = 0. \end{aligned}$$

本题获证.

【2805】 在表达式 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^4} dx$ 中, 在积分符号下取极限是否合理?

解 由于 $\int_0^1 \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{1+n^2x^4} \right] dx = \int_0^1 0 \cdot dx = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^4} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \arctan nx^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$,

故在积分号下取极限不合理.

一般说来, 若序列 $f_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛, 则是保证在积分符号下取极限为合理的一个充分条件, 但当它不一致收敛时, 则就不一定能保证可以在积分符号下取极限了, 本题就是其中一例. 事实上, 取 ε_0 使 $0 < \varepsilon_0 < \frac{1}{2}$, 不论 n 多么大, 只要取 $x = \frac{1}{n}$, 就有

$$\left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) - 0 \right| = \frac{n \cdot \frac{1}{n}}{1+n^2 \cdot \frac{1}{n^4}} > \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} > \varepsilon_0,$$

故此处的 $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^4}$ 在 $[0, 1]$ 上并不一致收敛.

求极限:

【2806】 $\lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \frac{x^n}{x^n+1}$.

解题思路 利用阿贝尔判别法, 易知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \frac{x^n}{x^n+1}$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛. 其次, 由于 $\frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \frac{x^n}{x^n+1}$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \left[\frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \frac{x^n}{x^n+1} \right] = \frac{(-1)^{n+1}}{2n} \quad (n=1, 2, \dots),$$

于是, 当 $x \rightarrow 1-0$ 时, 级数可以逐项取极限, 利用 2661 题的结果即可获解.

解 由于 $x \rightarrow 1-0$, 故可设 $0 \leq x \leq 1$. 此时, 由于 $\frac{x^n}{x^n+1}$ 小于 1, 且当 n 增加时单调下降, 而级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛, 故根据阿贝尔判别法知, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \frac{x^n}{x^n+1} \quad (1)$$

在 $[0,1]$ 上一致收敛. 又因 $\frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \frac{x^n}{x^n+1}$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \left[\frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \frac{x^n}{x^n+1} \right] = \frac{(-1)^{n+1}}{2n} \quad (n=1, 2, \dots),$$

故当 $x \rightarrow 1-0$ 时, 级数(1)可以逐项取极限, 其结果为

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \frac{x^n}{x^n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \frac{x^n}{x^n+1} \right] = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \frac{1}{2} \ln 2.$$

*) 利用 2661 题的结果.

【2807】 $\lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n+1}).$

解 由于 $x \rightarrow 1-0$, 故可设 $0 \leq x < 1$. 在此区间上, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n+1}) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n (1-x) = \frac{x(1-x)}{1-x} = x, \quad \text{故} \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n+1}) = \lim_{x \rightarrow 1-0} x = 1.$$

【2808】 $\lim_{x \rightarrow +0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^x}.$

提示 仿 2806 题的解法, 其结果为

$$\lim_{x \rightarrow +0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{2^n n^x} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

解 由于 $\frac{1}{n^x}$ 在 $[0, l]$ ($l > 0$) 上单调下降且小于或等于 1, 而数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 在 $[0, l]$ 上一致收敛, 故级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^x}$ 在 $[0, l]$ 上一致收敛. 又因 $\frac{1}{2^n n^x}$ 在 $[0, l]$ 上连续, 且 $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{2^n n^x} = \frac{1}{2^n}$, 故当 $x \rightarrow +0$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^x}$ 可以逐项取极限, 其结果为

$$\lim_{x \rightarrow +0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{2^n n^x} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

【2809】 逐项微分级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{x}{n^2}$ 合理否?

提示 合理.

解 由于当 $-\infty < x < +\infty$ 时,

$$\left(\arctan \frac{x}{n^2} \right)'_x = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{n^2} \right)^2} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{n^2}{n^4 + x^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故逐项微分后所得的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arctan \frac{x}{n^2} \right)'_x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4 + x^2}$$

在 $(-\infty, +\infty)$ 内一致收敛, 再由 $\left| \arctan \frac{x}{n^2} \right| \leq \frac{|x|}{n^2}$ 知, 原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{x}{n^2}$ 收敛; 因此, 原级数和的导数用

逐项微分级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{x}{n^2}$ 来计算是合理的.

【2810】 在闭区间 $[0, 1]$ 上逐项积分级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}})$ 合理否?

解 令 $S_n(x) = \sum_{k=1}^n (x^{\frac{1}{2k+1}} - x^{\frac{1}{2k-1}})$, 则 $x=0, 1$ 时, $S_n(x)=0$; 当 $0 < x < 1$ 时, $S_n(x) = x^{\frac{1}{2n+1}} - x$. 因此,

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \begin{cases} 0, & x=0, 1, \\ 1-x, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

取 ϵ_0 使 $0 < \epsilon_0 < \frac{1}{2}$, 不论 n 多么大, 只要取 $x_n = \frac{1}{2^{2n+1}}$ 就有

$$|S_n(x_n) - S(x_n)| = \frac{1}{2} > \epsilon_0.$$

因此, $S_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上不一致收敛.

注意, 对于不一致收敛的级数而言, 一般地讲逐项积分级数不一定合理. 但对于本题来说, 由于

$$\int_0^1 \left[\sum_{n=1}^{\infty} (x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}}) \right] dx = \int_0^1 (1-x) dx = \frac{1}{2}$$

及

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 (x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}}) dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{2n+2} - \frac{2n-1}{2n} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2n+2} \right) - \left(1 - \frac{1}{2n} \right) \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2} \right) = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

故本题所给出的级数在 $[0, 1]$ 上作逐项积分计算还是对的.

由此题说明, 级数在 $[a, b]$ 上一致收敛仅是可以逐项积分的一个充分条件, 并不是必要条件.

【2811】 设 $f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) 是无穷多次可微的函数, 且其导数 $f^{(n)}(x)$ ($n=1, 2, \dots$) 的序列在每一个有限区间 (a, b) 内一致收敛于函数 $\varphi(x)$. 证明: $\varphi(x) = Ce^x$, 其中 C 为常数.

证 由于 $f(x)$ 无穷多次可微, 故 $f^{(n)}(x)$ 在 (a, b) 内连续可微 ($n=1, 2, \dots$). 又按题设 $f^{(n)}(x)$ 在 (a, b) 内一致收敛于 $\varphi(x)$, 且其导数序列 $f^{(n+1)}(x)$ ($n=1, 2, \dots$) 在 (a, b) 内也一致收敛于 $\varphi(x)$, 故 $\varphi(x)$ 在 (a, b) 内可微, 并且

$$\varphi'(x) = [\lim_{n \rightarrow \infty} f^{(n)}(x)]' = \lim_{n \rightarrow \infty} [f^{(n)}(x)]' = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{(n+1)}(x) = \varphi(x).$$

积分之, 即得

$$\ln \varphi(x) = x + C_1,$$

也即 $\varphi(x) = Ce^x$, 其中 $C = e^{C_1}$ 为常数.

§ 5. 幂级数

1° 收敛区间 对于每一个幂级数

$$a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + \dots$$

都存在封闭的收敛区间: $|x-a| \leq R$, 该级数在其内收敛, 而在其外发散. 收敛半径 R 可按柯西—阿达马公式

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

来确定.

收敛半径 R 也可按公式 $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ 来计算 (若此极限存在).

2° 阿贝尔定理 若幂级数 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ($|x| < R$) 在收敛区间的端点 $x=R$ 处收敛, 则

$$S(R) = \lim_{x \rightarrow R-0} S(x).$$

3° 泰勒级数 在点 a 解析的函数在该点的某邻域内可展开为幂级数

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

此级数的余项

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

可以表示为

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \quad (0 < \theta < 1) \quad (\text{拉格朗日形式})$$

或

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}[a+\theta_1(x-a)]}{n!} (1-\theta_1)^n (x-a)^{n+1} \quad (0 < \theta_1 < 1) \quad (\text{柯西形式}).$$

必须记住下列五个基本展开式:

$$\text{I. } e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \quad (-\infty < x < +\infty).$$

$$\text{II. } \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots \quad (-\infty < x < +\infty).$$

$$\text{III. } \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \quad (-\infty < x < +\infty).$$

$$\text{IV. } (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} x^n + \cdots \quad (-1 < x < 1).$$

$$\text{V. } \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots \quad (-1 < x \leq 1).$$

4° 幂级数的运算 在公共的收敛区间 $|x-a| < R$ 内有:

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) (x-a)^n;$$

$$(2) \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n, \quad \text{式中 } c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0;$$

$$(3) \frac{d}{dx} \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \right] = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (x-a)^n;$$

$$(4) \int \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \right] dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-a)^{n+1}.$$

5° 在复数域内的幂级数 研究级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

式中 $c_n = a_n + ib_n$, $a = \alpha + i\beta$, $z = x + iy$, $i^2 = -1$. 对于每一个这样的级数都有一封闭的收敛圆 $|z-a| \leq R$, 该级数在其内收敛(并且绝对收敛), 而在其外发散. 收敛半径 R 等于幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| r^n$$

在实数域内的收敛半径.

求下列幂级数的收敛半径和收敛区间并研究其在收敛区间端点的性质:

$$\text{【2812】 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p}.$$

解 记 $a_n = \frac{1}{n^p}$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^p = 1,$$

故收敛半径 $R=1$; 收敛区间为 $(-1, 1)$.

当 $x=-1$ 时, 若 $p>1$, 则幂级数为绝对收敛; 若 $0 < p \leq 1$, 则为条件收敛; 当 $p \leq 0$ 时, 则为发散.

当 $x=1$ 时, 若 $p>1$, 则为绝对收敛; 若 $p \leq 1$, 则为发散.

$$\text{【2813】 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n.$$

解 记 $a_n = \frac{3^n + (-2)^n}{n}$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{1}{3}.$$

故收敛半径 $R = \frac{1}{3}$; 收敛区间为 $(-1 - \frac{1}{3}, -1 + \frac{1}{3})$, 即 $(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$.

当 $x = -\frac{4}{3}$ 时, 幂级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (-1)^n \frac{1}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + (\frac{2}{3})^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\frac{2}{3})^n}{n}.$$

但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 条件收敛, 而对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\frac{2}{3})^n}{n}$, 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(\frac{2}{3})^{n+1}}{n+1}}{\frac{(\frac{2}{3})^n}{n}} = \frac{2}{3} < 1,$$

故收敛. 因此, 当 $x = -\frac{4}{3}$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n$ 条件收敛.

当 $x = -\frac{2}{3}$ 时, 幂级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\frac{2}{3})^n}{n}.$$

由于上式右端第一个级数发散, 第二个级数收敛, 故原级数发散.

【2814】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n.$

解 记 $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$. 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = 4$, 故收敛半径 $R = 4$; 收敛区间为 $(-4, 4)$.

当 $x = -4$ 时, 利用斯特林公式 $n! = \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} (1 + o(1))$ 得

$$\left| \frac{(n!)^2}{(2n)!} (-4)^n \right| = \frac{(\sqrt{2\pi n} n^n e^{-n})^2 + o(1)}{\sqrt{4\pi n} (2n)^{2n} e^{-2n} + o(1)} 4^n = \sqrt{n\pi} (1 + o(1)) \rightarrow +\infty \quad (n \rightarrow \infty),$$

因此, 当 $x = -4$ 时级数发散.

当 $x = 4$ 时, 级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} 4^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{n}{2n+2} \right) = -\frac{1}{2} < 1,$$

故由拉比判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

【2815】 $\sum_{n=1}^{\infty} a^{n^2} x^n \quad (0 < a < 1).$

解 记 $a_n = a^{n^2}$. 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a^{2n+1}} = +\infty$, 故收敛半径 $R = +\infty$; 收敛区间为 $(-\infty, +\infty)$.

【2816】 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n.$

解 记 $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left[\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}} \right]^n \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}} \right\} = \frac{1}{e},$$

故收敛半径 $R = \frac{1}{e}$; 收敛区间为 $(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e})$.

当 $|x| = \frac{1}{e}$ 时, 由于

$$\left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \left(\frac{1}{e}\right)^n \cdot (\pm 1)^n \right| \rightarrow 1 \neq 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

故级数发散.

【2817】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a^{n^2}} x^n \quad (a > 1).$

解 记 $a_n = \frac{n!}{a^{n^2}}$, 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{2n+1}}{n+1} = +\infty$, 故收敛半径 $R = +\infty$; 收敛区间为 $(-\infty, +\infty)$.

【2818】 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \right]^p \left(\frac{x-1}{2} \right)^n.$

解 记 $a_n = \left[\frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} \right]^p \cdot \frac{1}{2^n}$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left(\frac{2n+1}{2n+2} \right)^p = 2,$$

故收敛半径 $R = 2$; 收敛区间为 $(-2+1, 2+1)$, 即 $(-1, 3)$.

当 $x = -1$ 时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \right]^p$, 由 2689 题的结果知: 若 $p > 2$, 为绝对收敛; 若 $0 < p \leq 2$, 为条件收敛; 若 $p \leq 0$, 为发散.

当 $x = 3$ 时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \right]^p$. 若 $p > 2$, 为绝对收敛; 若 $p \leq 2$, 为发散.

【2819】 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} \right]^p x^n.$

解 记 $a_n = (-1)^n \left[\frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} \right]^p$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{n+1} \right)^p = 2^p,$$

故收敛半径 $R = 2^p$; 收敛区间为 $(-2^p, 2^p)$.

当 $x = -2^p$ 时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!} \right]^p = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 由于

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \left(\frac{2n+3}{2n+2} \right)^p = \left(1 + \frac{1}{2n+2} \right)^p = 1 + \frac{p}{2n+2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1 + \frac{p}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

故由高斯判别法知: 当 $\frac{p}{2} > 1$ (即 $p > 2$) 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 (由于是正项级数, 故也是绝对收敛); 当 $\frac{p}{2} \leq 1$

(即 $p \leq 2$) 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

当 $x = 2^p$ 时, 级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!} \right]^p = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{2 \cdot 4 \cdots (2n)}{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)} \right]^p, \quad (1)$$

由前段知, 当 $p > 2$ 时, 为绝对收敛; 当 $0 < p \leq 2$ 时, 由于

$$\begin{aligned} \left| (-1)^n \left[\frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!} \right]^p \right| &\sim \left[\frac{4^n \cdot 2n\pi \cdot n^{2n} e^{-2n}}{\sqrt{(4n+2)\pi} (2n+1)^{2n+1} e^{-(2n+1)}} \right]^p \\ &= \left[\frac{4^n \cdot 2\pi e}{\sqrt{(4n+2)\pi} \cdot 2^{2n+1} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n+1}} \right]^p \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

且

$$\frac{\left[\frac{4^{n+1}[(n+1)!]^2}{(2n+3)!}\right]^p}{\left[\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}\right]^p} = \left(\frac{2n+2}{2n+3}\right)^p < 1,$$

故级数(1)逐项下降,根据莱布尼茨判别法知,级数(1)收敛,但由于由其绝对值组成的级数发散.因此,当 $0 < p \leq 2$ 时,级数(1)条件收敛.当 $p=0$ 时,通项为 $(-1)^n$,故级数为发散;当 $p < 0$ 时,通项趋于无穷,因而级数也发散.

【2820】
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} x^n.$$

解 记 $a_n = \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}$, 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{m-n} \right| = 1,$$

故收敛半径 $R=1$; 收敛区间为 $(-1, 1)$.

当 $x=1$ 时,级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{m}{n},$$

利用 2700 题的结果,即知:当 $m \geq 0$ 时,绝对收敛;当 $-1 < m < 0$ 时,条件收敛;当 $m \leq -1$ 时,发散.

当 $x=-1$ 时,级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \binom{m}{n}.$$

显见当 $m \geq 0$ 时为绝对收敛;当 $m < 0$ 时:若 m 为负整数,设为 $-k$ (k 为正整数),则通项为

$$\frac{k(k+1)\cdots(k+n-1)}{n!} = \frac{(n+1)(n+2)\cdots(k+n-1)}{(k-1)!} \rightarrow +\infty \quad (n \rightarrow \infty),$$

故级数发散;若 m 不为负整数,由于通项为正,并且总可以大于 $\frac{k(k+1)\cdots(k+n-1)}{n!}$, 其中 $-m > k$, 故级数

也发散.因此,当 $m < 0$ 时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \binom{m}{n}$ 发散.

【2821】
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) x^n \quad (a > 0, b > 0).$$

解 考虑级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n} x^n \quad \text{及} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^n}{n^2} x^n,$$

容易求得它们的收敛半径分别为 $R_1 = \frac{1}{a}$ 及 $R_2 = \frac{1}{b}$, 故原级数的收敛半径 $R = \min(R_1, R_2) = \min\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)$;

收敛区间为 $(-R, R)$.

当 $x=-R$ 时,若 $a < b$, 则级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) \left(-\frac{1}{b} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \left(\frac{a}{b} \right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}, \quad (1)$$

对于上式右端的第一个级数,利用达朗贝尔判别法有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1}}{n+1}}{(-1)^n \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n}{n}} \right| = \frac{a}{b} < 1,$$

故知其为绝对收敛,而第二个级数显然为绝对收敛.因此,当 $a < b$ 时,级数(1)绝对收敛.当 $a \geq b$ 时,级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) \left(-\frac{1}{a} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2} \left(\frac{b}{a} \right)^n, \quad (2)$$

上式右端的第一个级数条件收敛,第二个级数绝对收敛($b < a$)或条件收敛($b = a$),故当 $a \geq b$ 时,级数(2)条件收敛.

当 $x = R$ 时,若 $a < b$,级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) \left(\frac{1}{b} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{a}{b} \right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

由前段知其为绝对收敛;若 $a \geq b$,级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) \left(\frac{1}{a} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{b}{a} \right)^n,$$

它是一个发散级数与收敛级数的和,故为发散级数.

【2822】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^n + b^n} \quad (a > 0, b > 0).$

解 记 $a_n = \frac{1}{a^n + b^n}$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\max(a, b) \cdot \frac{1 + \theta^{n+1}}{1 + \theta^n} \right] = \max(a, b),$$

其中 $\theta = \frac{\min(a, b)}{\max(a, b)}$, $0 < \theta \leq 1$, 故收敛半径 $R = \max(a, b)$; 收敛区间为 $(-R, R)$.

当 $|x| = R$ 时, 由于 $\frac{R^n}{a^n + b^n} \rightarrow 1 \neq 0$, 故级数发散.

【2823】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^{\sqrt{n}}} \quad (a > 0).$

解 记 $a_n = \frac{1}{a^{\sqrt{n}}}$. 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}} = 1$, 故收敛半径 $R = 1$; 收敛区间为 $(-1, 1)$.

当 $x = 1$ 时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^{\sqrt{n}}}$. 由于

$$n \left(\frac{1}{a^{\sqrt{n}}} - \frac{1}{a^{\sqrt{n+1}}} \right) = \frac{a^{\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}} - 1}{\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}} \cdot \frac{n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}},$$

且上式右端第一个因式当 $n \rightarrow \infty$ 时趋于 $\ln a$, 故当 $a > 1$ 时, 上式趋于 $+\infty$, 因而级数收敛; 当 $a < 1$ 时, 上式趋于 $-\infty$, 因而, 级数发散; 而当 $a = 1$ 时, 由于通项为 1, 故级数也发散.

当 $x = -1$ 时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{a^{\sqrt{n}}}$. 当 $a > 1$ 时, 级数绝对收敛; 当 $a \leq 1$ 时, 由于通项不趋于零, 故级数发散.

总之, 当 $|x| = 1$ 时, 若 $a > 1$, 则级数绝对收敛; 若 $a \leq 1$, 则级数发散.

【2824】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{-\sqrt{n}} x^n}{\sqrt{n^2 + 1}}.$

解 记 $a_n = \frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2 + 1}}$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} 3^{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{(n+1)^2 + 1}}{\sqrt{n^2 + 1}} = 1,$$

故收敛半径 $R = 1$; 收敛区间为 $(-1, 1)$.

当 $x = 1$ 时, 级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2 + 1}}. \quad (1)$$

由于 $0 < \frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2 + 1}} < \frac{1}{3^{\sqrt{n}}}$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{\sqrt{n}}}$ 收敛, 故级数(1)收敛.

当 $x = -1$ 时, 级数绝对收敛.

总之,当 $|x|=1$ 时,级数绝对收敛.

*) 利用 2823 题的结果.

【2825】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} x^n.$

解 记 $a_n = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$. 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{2n+2} = 1$, 故收敛半径 $R=1$, 收敛区间为 $(-1, 1)$.

当 $x=1$ 时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$, 由拉比判别法易知, 它是发散级数.

当 $x=-1$ 时, 由于 $\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{2n+3}{2n+2} > 1$, 即 $|a_n| > |a_{n+1}|$, 且有 $|a_n| \rightarrow 0$, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$ 收敛. 但 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$ 发散, 故当 $x=-1$ 时, 级数条件收敛.

【2826】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{n}{e} \right)^n x^n.$

解 记 $a_n = \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{n}{e} \right)^n$. 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = 1$, 故收敛半径 $R=1$, 收敛区间为 $(-1, 1)$.

当 $x=-1$ 时, 级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e} \right)^n. \quad (1)$$

由于

$$\frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e} \right)^n \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n} e^{-n} n^n} \left(\frac{n}{e} \right)^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \geq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{n} > 0$$

且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 故级数(1)发散.

当 $x=1$ 时, 级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e} \right)^n. \quad (2)$$

由于 $\frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e} \right)^n \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e} \right)^n = 0$. 又由于

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} > 1 \quad (n=1, 2, \dots),$$

故 $|a_n| > |a_{n+1}|$. 因此, 级数(2)收敛. 但由于级数(1)发散, 故级数(2)条件收敛.

【2827】 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) x^n.$

解 记 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$. 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 1$, 故收敛半径 $R=1$, 收敛区间为 $(-1, 1)$.

当 $|x|=1$ 时, 由于 $a_n \rightarrow +\infty$ ($n \rightarrow \infty$), 故级数发散.

【2828】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[3 + (-1)^n]^n}{n} x^n.$

提示 记 $a_n = \frac{[3 + (-1)^n]^n}{n}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 4$.

解 记 $a_n = \frac{[3 + (-1)^n]^n}{n}$. 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 4$, 故收敛半径 $R = \frac{1}{4}$; 收敛区间为 $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

当 $x = \frac{1}{4}$ 时, 级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[3 + (-1)^n]^n}{n \cdot 4^n}. \quad (1)$$

将它拆成两部分,一部分为 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k}$,一部分为 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)2^{2k+1}}$.前一级数显然发散;而对于后一级数,利用柯西判别法或达朗贝尔判别法易知其为收敛.因此,级数(1)发散.

当 $x = -\frac{1}{4}$,同法可证,原级数可拆成一个发散级数与一个收敛级数.因此,它是发散的.

【2829】
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left(1+2\cos\frac{\pi n}{4}\right)^n}{\ln n} x^n.$$

解 记 $a_n = \frac{\left(1+2\cos\frac{\pi n}{4}\right)^n}{\ln n}$. 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 3$, 故收敛半径 $R = \frac{1}{3}$; 收敛区间为 $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

当 $|x| = \frac{1}{3}$ 时, 对于 $n = 8k$, 由于

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(1+2\cos 2k\pi)^{8k}}{\ln 8k} \cdot \frac{1}{3^{8k}} \right] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ln k + \ln 8} \quad \text{及} \quad \frac{1}{\ln k + \ln 8} > \frac{1}{k + \ln 8} > 0,$$

且 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k + \ln 8}$ 发散, 故级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ln k + \ln 8}$ 发散.

不难证明: 当 $n = 8k+1, 8k+2, \dots, 8k+7 (k=1, 2, \dots)$ 时, 级数

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left(1+2\cos\frac{n\pi}{4}\right)^n}{\ln n} \left(\pm\frac{1}{3}\right)^n \quad (1)$$

收敛. 事实上, $\frac{1}{\ln n}$ 单调趋于零, 且

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left[\left| \left(1+2\cos\frac{n\pi}{4}\right)^n \right| \cdot \frac{1}{3^n} \right] \leq \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1+\sqrt{2}}{3} \right)^n < \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+\sqrt{2}}{3} \right)^n < \frac{1+\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{1+\sqrt{2}}{3}} = \frac{1+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} < 5,$$

根据狄利克雷判别法可知级数(1)收敛.

于是, 当 $|x| = \frac{1}{3}$ 时, 原级数是由一个发散级数与诸收敛级数依次相加而成的. 因此, 它是发散的.

【2830】
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n}.$$

解 记 $a_n = \frac{1}{2^n}$. 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2}$ 及 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2}} = 1$, 故收敛半径 $R = 1$; 收敛区间为 $(-1, 1)$.

当 $|x| = 1$ 时, 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(\pm 1)^{n^2}}{2^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 收敛, 故原级数绝对收敛.

【2831】
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n} x^n \quad (\text{普林斯海姆级数}).$$

解 记 $a_n = \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$. 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 1$, 故收敛半径 $R = 1$; 收敛区间为 $(-1, 1)$.

当 $x = 1$ 时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$, 它是条件收敛的*).

当 $x = -1$ 时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]+n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$. 记 $A_l = \{n | [\sqrt{n}] = l\} (l=1, 2, \dots)$. 显然 A_l 内的元素可写成 $n = l^2 + s$, 而 $s = 0, 1, 2, \dots, 2l$. 考虑

$$\begin{aligned} u_l &= \sum_{n \in A_l} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]+n}}{n} = \sum_{s=0}^{2l} \frac{(-1)^{l^2+l+s}}{l^2+s} = \sum_{s=0}^{2l} \frac{(-1)^s}{l^2+s} \\ &= \frac{1}{l^2} - \left(\frac{1}{l^2+1} - \frac{1}{l^2+2} \right) - \dots - \left(\frac{1}{l^2+2l-1} - \frac{1}{l^2+2l} \right) \leq \frac{1}{l^2} \quad (l=1, 2, \dots). \end{aligned}$$

由于 $\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^2}$ 收敛, 故 $\sum_{l=1}^{\infty} u_l$ 收敛. 注意 $A_i \cap A_j = \emptyset (i \neq j)$, 且 $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots$ 就是全体正整数. 易证 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

与 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 同时收敛或同时发散. 由此可见, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 因而, 显然是条件收敛的.

*) 利用 2672 题的结果.

【2832】 求超几何级数

$$1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+n-1)\beta(\beta+1) \cdots (\beta+n-1)}{1 \cdot 2 \cdots n \cdot \gamma(\gamma+1) \cdots (\gamma+n-1)} x^n + \dots$$

的收敛域.

解 记 $a_n = \frac{\alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+n-1)\beta(\beta+1) \cdots (\beta+n-1)}{1 \cdot 2 \cdots n \gamma(\gamma+1) \cdots (\gamma+n-1)}$. 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(\gamma+n)}{(\alpha+n)(\beta+n)} = 1$,

故收敛半径 $R=1$; 收敛区间为 $(-1, 1)$.

当 $x=1$ 时, 级数为

$$1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} + \dots + \frac{\alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+n-1)\beta(\beta+1) \cdots (\beta+n-1)}{n! \gamma(\gamma+1) \cdots (\gamma+n-1)} + \dots$$

由于

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\gamma - \alpha - \beta + 1}{n} + \frac{\theta_n}{n^2} \quad (|\theta_n| \leq L),$$

故当 $\gamma - \alpha - \beta + 1 > 1$ 即 $\gamma - \alpha - \beta > 0$ 时, 级数收敛且也是绝对收敛的; 当 $\gamma - \alpha - \beta \leq 0$ 时, 级数发散.

当 $x=-1$ 时, 由上可知, $\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 1 + \frac{\gamma - \alpha - \beta + 1}{n} + \frac{\theta_n}{n^2}$, 当 $\gamma - \alpha - \beta > 0$ 时, 级数绝对收敛; 当 $\gamma - \alpha - \beta < -1$ 时, 从某项开始, 将有

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| < 1 \quad \text{即} \quad |a_n| < |a_{n+1}|,$$

a_n 不趋于零, 级数发散; 当 $-1 < \gamma - \alpha - \beta$ 时, 在弃去若干个开始项以后, 就变成每项的绝对值单调递减的交错级数了, 并在这里, 把求通项(绝对值)的极限化成下列无穷乘积

$$\prod_{n=n_0}^{\infty} \frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(n+1)(\gamma+n)}$$

的值更为方便. 由于

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} = \sum_{n=n_0}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{\gamma - \alpha - \beta + 1}{n} + \frac{\theta'_n}{n^2} \right) = -\infty \quad (|\theta'_n| \leq M),$$

故上述无穷乘积的值为零, 即 $a_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$. 因此, 级数收敛. 当 $\gamma - \alpha - \beta = -1$ 时, 由于 $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\theta'_n}{n^2}$, 故无穷乘积的值异于零, 因而 $a_n \not\rightarrow 0$, 级数发散.

综上所述, 现将超几何级数的敛散情况列表如下:

$ x < 1$		绝对收敛
$ x > 1$		发 散
$x = 1$	$\gamma - \alpha - \beta > 0$	绝对收敛
	$\gamma - \alpha - \beta \leq 0$	发 散
$x = -1$	$\gamma - \alpha - \beta > 0$	绝对收敛
	$-1 < \gamma - \alpha - \beta \leq 0$	条件收敛
	$\gamma - \alpha - \beta \leq -1$	发 散

求下列广义幂级数的收敛域:

【2833】 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n.$

解 记 $a_n = \frac{1}{2n+1}$. 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 1$, 故当 $\left| \frac{1-x}{1+x} \right| < 1$ (即 $x > 0$) 时, 级数绝对收敛; 当 $x < 0$ 时, 级数发散; 当 $x = 0$ 时, 级数为 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$, 显然发散. 于是, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n$ 的收敛域为 $(0, +\infty)$.

【2834】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n} \sin \frac{\pi}{2^n}$.

解 记 $a_n = \sin \frac{\pi}{2^n}$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{2^n}}{\sin \frac{\pi}{2^{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}} = 2,$$

故当 $\left| \frac{1}{x} \right| < 2$ 即当 $|x| > \frac{1}{2}$ 时, 级数绝对收敛; 当 $|x| < \frac{1}{2}$ 时, 级数发散; 当 $|x| = \frac{1}{2}$ 时, 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \sin \frac{\pi}{2^n} = \pi \neq 0,$$

故级数发散. 于是, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n} \sin \frac{\pi}{2^n}$ 的收敛域为 $(-\infty, -\frac{1}{2})$ 及 $(\frac{1}{2}, +\infty)$, 即满足不等式 $|x| > \frac{1}{2}$ 的一切 x 值所成的集合.

【2835】 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{x^n}{2^{n^2}}$.

解 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{x^n}{2^{n^2}} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{x^n}{2^{n^2}} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^{n^2}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^{n^2}} \cdot \frac{1}{x^n} \right) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2^{n^2}}.$

级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2^{n^2}}$ 的收敛域为 $(-\infty, +\infty)^{*})$. 而级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^{n^2}} \cdot \frac{1}{x^n} \right)$ 的收敛域为 $(-\infty, 0)$ 及 $(0, +\infty)$. 因此, 级数 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2^{n^2}} x^n$ 的收敛域为 $(-\infty, 0)$ 及 $(0, +\infty)$, 即满足不等式 $0 < |x| < +\infty$ 的一切 x 值所成的集合.

*) 利用 2815 题的结果.

【2836】 $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-n^2} e^{-nx}.$

解 记 $a_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-n^2}$, 则原级数为 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n (e^{-x})^n$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-n} = e^{-1},$$

故当 $|e^{-x}| < \frac{1}{e} = e$ 即当 $1+x > 0$ 或 $x > -1$ 时, 级数绝对收敛; 当 $x < -1$ 时, 级数发散; 当 $x = -1$ 时, 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-n^2} e^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} \right]^n = 1 \neq 0,$$

故级数发散. 于是, 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-n^2} e^{-nx}$ 的收敛域为 $(-1, +\infty)$.

【2837】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{3n} (n!)^3}{(3n)!} \tan^n x.$

解 记 $a_n = \frac{3^{3n} (n!)^3}{(3n)!}$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+1)(3n+2)}{9(n+1)^2} = 1,$$

故当 $|\tan x| < 1$ 即当 $|x - k\pi| < \frac{\pi}{4}$ (k 为整数) 时, 级数绝对收敛; 当 $|x - k\pi| > \frac{\pi}{4}$ 时, 级数发散. 当 $|x - k\pi| = \frac{\pi}{4}$

时,级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!} (\pm 1)^n.$$

由于

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{(3n+1)(3n+2)}{9(n+1)^2} < 1,$$

故 $|a_n| < |a_{n+1}|$, 从而, $a_n \not\rightarrow 0$, 级数发散. 于是, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!} \tan^n x$ 的收敛域为满足不等式 $|x - k\pi| < \frac{\pi}{4}$ (k 为整数) 的一切 x 值所成的集合.

【2838】 按二项式 $x+1$ 的非负整数次幂展开函数 $f(x) = x^3$.

解 解法 1: $f(x) = [(x+1) - 1]^3 = (x+1)^3 - 3(x+1)^2 + 3(x+1) - 1$.

解法 2: $f(-1) = -1$, $f'(-1) = 3$, $f''(-1) = -6$, $f'''(-1) = 6$, $f^{(4)}(-1) = f^{(5)}(-1) = \dots = 0$.

于是,

$$f(x) = -1 + 3(x+1) - \frac{6}{2!}(x+1)^2 + \frac{6}{3!}(x+1)^3 = -1 + 3(x+1) - 3(x+1)^2 + (x+1)^3.$$

【2839】 把函数 $f(x) = \frac{1}{a-x}$ ($a \neq 0$) 按以下方式展开为幂级数:

(1) 依 x 的幂展开; (2) 依二项式 $x-b$ 的幂展开, 此处 $b \neq a$; (3) 依 $\frac{1}{x}$ 的幂展开. 求出相应的收敛域.

解 (1) $f(x) = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{a}} = \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{a}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{a^{n+1}}$, 收敛域为 $|x| < |a|$.

(2) $f(x) = \frac{1}{a-b-(x-b)} = \frac{1}{a-b} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x-b}{a-b}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-b)^n}{(a-b)^{n+1}}$, 收敛域为 $|x-b| < |a-b|$.

(3) $f(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\frac{a}{x} - 1} = -\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1 - \frac{a}{x}} = -\frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{x}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{x^{n+1}}$, 收敛域为 $|x| > |a|$.

【2840】 按差 $x-1$ 的非负整数次幂展开函数 $f(x) = \ln x$, 并说明展开式的收敛区间. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

的和.

解 $f(x) = \ln[1 + (x-1)] = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n}$. (1)

收敛区间为 $|x-1| < 1$ 或 $0 < x < 2$.

当 $x-1=1$ 即当 $x=2$ 时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. 显然收敛, 故当 $0 < x \leq 2$ 时, 级数(1)收敛.

由于 $\ln x$ 在 $x=2$ 连续, 故当 $x=2$ 时, (1)式也成立, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$.

写出下列函数按变量 x 的非负整数次幂的展开式, 并求出相应的收敛区间:

【2841】 $f(x) = \operatorname{sh} x$.

解 $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$,

收敛区间为 $|x| < +\infty$ 或 $(-\infty, +\infty)$.

【2842】 $f(x) = \operatorname{ch} x$.

解 $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, 收敛区间为 $(-\infty, +\infty)$.

【2843】 $f(x) = \sin^2 x$.

$$\text{解 } f(x) = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} \left[1 - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} x^{2n}}{(2n)!} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!},$$

收敛区间为 $(-\infty, +\infty)$.

$$\text{【2844】 } f(x) = a^x \quad (a > 0, a \neq 1).$$

$$\text{解 } f(x) = e^{x \ln a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^n a}{n!} x^n. \text{ 由于}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{\ln^n a}{n!} \right|} = |\ln a| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0,$$

故收敛半径 $R = +\infty$; 收敛区间为 $(-\infty, +\infty)$.

$$\text{【2845】 } f(x) = \sin(u \arcsin x).$$

$$\text{解 } \arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^x \left(1 + \frac{1}{2} t^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} t^4 + \dots \right) dt = x + \frac{1}{2 \cdot 3} x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} x^5 + \dots \quad (|x| < 1),$$

$$\begin{aligned} f(x) &= u \arcsin x - \frac{u^3}{3!} (\arcsin x)^3 + \frac{u^5}{5!} (\arcsin x)^5 - \dots \\ &= ux + \frac{u(1^2 - u^2)}{3!} x^3 + \frac{u(1^2 - u^2)(3^2 - u^2)}{5!} x^5 + \dots, \end{aligned}$$

收敛区间为 $(-1, 1)$.

$$\text{【2846】 } f(x) = \cos(u \arcsin x).$$

$$\text{解 } f(x) = 1 - \frac{u^2}{2!} (\arcsin x)^2 + \frac{u^4}{4!} (\arcsin x)^4 - \dots = 1 - \frac{u^2}{2!} x^2 - \frac{u^2(2^2 - u^2)}{4!} x^4 - \dots,$$

收敛区间为 $(-1, 1)$.

$$\text{【2847】 写出函数 } f(x) = x^x \text{ 按差 } x-1 \text{ 的非负整数次幂展开式的前三项.}$$

$$\begin{aligned} \text{解 } f(x) &= x^x, & f(1) &= 1; \\ f'(x) &= x^x(1 + \ln x), & f'(1) &= 1; \\ f''(x) &= x^x(1 + \ln x)^2 + x^{x-1}, & f''(1) &= 2; \\ f'''(x) &= x^x(1 + \ln x)^3 + 2x^{x-1}(1 + \ln x) + x^{x-2} \left(\ln x + \frac{x-1}{x} \right), & f'''(1) &= 3. \end{aligned}$$

于是, 展开式的前三项为

$$1 + (x-1) + (x-1)^2 + \frac{1}{2} (x-1)^3 + \dots,$$

收敛区间为 $|x-1| < 1$, 即 $0 < x < 2$.

$$\text{【2848】 写出函数 } f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}} \quad (x \neq 0) \text{ 和 } f(0) = e \text{ 按变量 } x \text{ 的非负整数次幂展开式的前三项.}$$

$$\begin{aligned} \text{解 } f(x) &= (1+x)^{\frac{1}{x}} \quad (x \neq 0), & f(0) &= e; \\ f'(x) &= (1+x)^{\frac{1}{x}} \left[-\frac{1}{x^2} \ln(1+x) + \frac{1}{x(1+x)} \right] = (1+x)^{\frac{1}{x}} \left[-\frac{1}{x^2} \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \right) + \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} \right] \\ &= (1+x)^{\frac{1}{x}} \left[\frac{1}{2} - \frac{x}{3} - \frac{1}{1+x} + o(x) \right] \quad (x \neq 0), \end{aligned}$$

由微分学中值定理知 $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(\xi)$, 其中 ξ 介于 0 与 x 之间, 从而,

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} f'(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow 0} f'(\xi) = -\frac{e}{2}; \\ f''(x) &= (1+x)^{\frac{1}{x}} \left\{ \left[\frac{1}{2} - \frac{x}{3} - \frac{1}{1+x} + o(x) \right]^2 + \frac{2}{x^3} \ln(1+x) - \frac{1}{x^2(1+x)} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1+x)^2} \right\} \\ &= (1+x)^{\frac{1}{x}} \left\{ \left[\frac{1}{2} - \frac{x}{3} - \frac{1}{1+x} + o(x) \right]^2 + \frac{2}{3} - \frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2} + o_1(x) \right\} \quad (x \neq 0), \end{aligned}$$

仿上可得

$$f''(0) = \frac{11}{12}e;$$

$$f'''(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}} \left\{ \left[\frac{1}{2} - \frac{x}{3} - \frac{1}{1+x} + o(x) \right]^3 + 3 \left[\frac{1}{2} - \frac{x}{3} - \frac{1}{1+x} + o(x) \right] \cdot \left[\frac{2}{3} - \frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2} + o_1(x) \right] + \left[-\frac{6}{x^4} \ln(1+x) + \frac{2}{x^3(1+x)} + \frac{4}{x^3} + \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{(1+x)^3} \right] \right\} \quad (x \neq 0),$$

同理可得

$$f'''(0) = -\frac{21}{8}e.$$

于是,展开式的前三项为 $e\left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{11}{24}x^2 - \frac{7}{16}x^3 + \dots\right)$, 收敛区间为 $(-1, 1)$.

【2849】 将函数 $\sin(x+h)$ 和 $\cos(x+h)$ 按变量 h 的非负整数次幂展开.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \sin(x+h) &= \sin x \cosh + \cos x \sinh = \sin x \cdot \left(1 - \frac{h^2}{2!} + \frac{h^4}{4!} - \dots\right) + \cos x \cdot \left(h - \frac{h^3}{3!} + \frac{h^5}{5!} - \dots\right) \\ &= \sin x + h \cos x - \frac{h^2}{2!} \sin x - \frac{h^3}{3!} \cos x + \dots. \end{aligned}$$

同法可求得

$$\cos(x+h) = \cos x - h \sin x - \frac{h^2}{2!} \cos x + \frac{h^3}{3!} \sin x + \dots.$$

它们的收敛区间均为 $(-\infty, +\infty)$.

【2850】 不进行实际的展开工作而求函数 $f(x) = \frac{x}{x^2-5x+6}$ 的幂级数展开式的收敛区间:(1)依 x 的幂展开;(2)依二项式 $x-5$ 的幂展开.

解 (1) 由于

$$\frac{x}{x^2-5x+6} = \frac{-2}{x-2} + \frac{3}{x-3} = -\frac{1}{1-\frac{x}{2}} - \frac{1}{1-\frac{x}{3}},$$

及等式右端第一项的展开式的收敛区间为 $(-2, 2)$, 而第二项的展开式的收敛区间为 $(-3, 3)$, 取其公共部分, 即得函数 $f(x)$ 展为关于 x 的幂的幂级数的收敛区间为 $(-2, 2)$.

$$(2) \quad \frac{x}{x^2-5x+6} = \frac{3}{(x-5)+2} - \frac{2}{(x-5)+3} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{x-5}{2}} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{x-5}{3}}.$$

上式右端第一项的展开式的收敛区间为 $|x-5| < 2$, 而第二项展开式的收敛区间为 $|x-5| < 3$, 取其公共部分, 即得函数 $f(x)$ 展为关于 $x-5$ 的幂的幂级数的收敛区间为 $|x-5| < 2$ 或 $(3, 7)$.

利用基本展开式 I ~ V, 写出下列函数关于 x 的幂级数展开式

【2851】 e^{-x^2} .

$$\text{解} \quad e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} \quad (|x| < +\infty).$$

【2852】 $\cos^2 x$.

$$\text{解} \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n} \quad (|x| < +\infty).$$

【2853】 $\sin^3 x$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \sin^3 x &= \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x = \frac{3}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \frac{3}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^{2n}-1}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad (|x| < +\infty). \end{aligned}$$

【2854】 $\frac{x^{10}}{1-x}$.

解 $\frac{x^{10}}{1-x} = x^{10} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=10}^{\infty} x^n \quad (|x| < 1).$

【2855】 $\frac{1}{(1-x)^2}.$

解 $\frac{1}{(1-x)^2} = (1-x)^{-2}$
 $= 1 + (-2)(-x) + \frac{(-2)(-2-1)}{2!}(-x)^2 + \cdots + \frac{(-2)(-2-1)\cdots(-2-n+1)}{n!}(-x)^n + \cdots$
 $= \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n \quad (|x| < 1).$

【2856】 $\frac{x}{\sqrt{1-2x}}.$

解 $\frac{x}{\sqrt{1-2x}} = x(1-2x)^{-\frac{1}{2}}$
 $= x \left[1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(-2x) + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}(-2x)^2 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{3!}(-2x)^3 + \cdots \right]$
 $= x + x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2!}x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3!}x^4 + \cdots = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!}x^{n+1} \quad (|x| < \frac{1}{2}).$

当 $x = -\frac{1}{2}$ 时, 上式右端为一交错级数

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!},$$

利用 2689 题的结果, 即知它是收敛的.

当 $x = \frac{1}{2}$ 时, $\frac{x}{\sqrt{1-2x}}$ 无定义, 故不必研究级数的敛散性. 从而,

$$\frac{x}{\sqrt{1-2x}} = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!}x^{n+1} \quad \left(-\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}\right).$$

【2857】 $\ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$

解 $\ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2} [\ln(1+x) - \ln(1-x)] = \frac{1}{2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(-x)^n}{n} \right]$
 $= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (|x| < 1).$

【2858】 $\frac{x}{1+x-2x^2}.$

提示 将所给函数分解为部分分式.

解 $\frac{x}{1+x-2x^2} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+2x} \right) = \frac{1}{3} \left[\sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n x^n \right] = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} [1 - (-2)^n] x^n$
 $(|x| < \frac{1}{2}).$

【2859】 $\frac{12-5x}{6-5x-x^2}.$

提示 仿 2858 题.

解 $\frac{12-5x}{6-5x-x^2} = \frac{1}{1-x} + \frac{6}{6+x} = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+\frac{x}{6}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^n}{6^n} \right] x^n \quad (|x| < 1).$

【2860】 $\frac{x}{(1-x)(1-x^2)}.$

提示 先将所给函数分解成部分分式,再利用基本展开式及 2855 题的结果.

$$\begin{aligned}
 \text{解 } \frac{x}{(1-x)(1-x^2)} &= -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+x} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1-x)^2} \\
 &= -\frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n - \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} x^n + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1) - \frac{1+(-1)^n}{2} \right] x^n \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[n + \frac{1-(-1)^n}{2} \right] x^n \quad (|x| < 1).
 \end{aligned}$$

*) 利用 2855 题的结果.

【2861】 $\frac{1}{1-x-x^2}$.

$$\begin{aligned}
 \text{解 } \frac{1}{1-x-x^2} &= \frac{1}{\frac{5}{4} - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2} - \left(x + \frac{1}{2}\right)} + \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2} + \left(x + \frac{1}{2}\right)} \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{2}{\sqrt{5}-1} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{5}-1}x\right)^{-1} + \frac{2}{\sqrt{5}+1} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{5}+1}x\right)^{-1} \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{2}{\sqrt{5}-1}\right)^{n+1} + (-1)^n \left(\frac{2}{\sqrt{5}+1}\right)^{n+1} \right] x^n \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n+1} + (-1)^n \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{n+1} \right] x^n \quad (|x| < \frac{\sqrt{5}-1}{2}).
 \end{aligned}$$

【2862】 $\frac{1}{1+x+x^2}$.

$$\begin{aligned}
 \text{解 } \frac{1}{1+x+x^2} &= \frac{1}{i\sqrt{3}} \left[\frac{1}{x + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}} - \frac{1}{x + \frac{1+i\sqrt{3}}{2}} \right] \\
 &= \frac{1}{i\sqrt{3}} \left[\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \left(1 + \frac{1+i\sqrt{3}}{2}x\right)^{-1} - \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \left(1 + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}x\right)^{-1} \right] \\
 &= \frac{1}{i\sqrt{3}} \left[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} x^n \right] \\
 &= \frac{1}{i\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} \right] x^n.
 \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}
 &(-1)^n \left[\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} \right] \\
 &= (-1)^n \left[\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)^{n+1} - \left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}\right)^{n+1} \right] \\
 &= (-1)^n \left[\left(\cos \frac{n+1}{3}\pi + i \sin \frac{n+1}{3}\pi\right) - \left(\cos \frac{n+1}{3}\pi - i \sin \frac{n+1}{3}\pi\right) \right] \\
 &= (-1)^n \cdot 2i \sin \frac{n+1}{3}\pi = 2i \cdot (-1)^n \sin \left[(n+1)\pi - \frac{2(n+1)}{3}\pi \right] \\
 &= 2i \cdot (-1)^n \left[-\cos(n+1)\pi \sin \frac{2(n+1)}{3}\pi \right] \\
 &= 2i \cdot (-1)^n \cdot (-1) \cdot (-1)^{n+1} \sin \frac{2(n+1)}{3}\pi = 2i \sin \frac{2(n+1)}{3}\pi,
 \end{aligned}$$

故得

$$\frac{1}{1+x+x^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sin \frac{2(n+1)}{3}\pi.$$

其中 $|x| < \min\left(\frac{2}{|1+i\sqrt{3}|}, \frac{2}{|1-i\sqrt{3}|}\right) = 1$, 即 $|x| < 1$.

【2863】 $\frac{x\cos\alpha - x^2}{1-2x\cos\alpha+x^2}$.

解
$$\begin{aligned}\frac{x\cos\alpha - x^2}{1-2x\cos\alpha+x^2} &= -1 - \frac{1}{2} \left[\frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{x - (\cos\alpha + i\sin\alpha)} + \frac{\cos\alpha - i\sin\alpha}{x - (\cos\alpha - i\sin\alpha)} \right] \\ &= -1 + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 - x(\cos\alpha - i\sin\alpha)} + \frac{1}{1 - x(\cos\alpha + i\sin\alpha)} \right] \\ &= -1 + \frac{1}{2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} x^n (\cos\alpha - i\sin\alpha)^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n (\cos\alpha + i\sin\alpha)^n \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} x^n (\cos n\alpha - i\sin n\alpha + \cos n\alpha + i\sin n\alpha) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} x^n \cos n\alpha,\end{aligned}$$

其中 $|x| < \min\left(\frac{1}{|\cos\alpha + i\sin\alpha|}, \frac{1}{|\cos\alpha - i\sin\alpha|}\right) = 1$, 即 $|x| < 1$.

【2864】 $\frac{x\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}$ *).

解
$$\begin{aligned}\frac{x\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2} &= \frac{ix}{2} \left[\frac{1}{x - (\cos\alpha - i\sin\alpha)} - \frac{1}{x - (\cos\alpha + i\sin\alpha)} \right] \\ &= \frac{ix}{2} \left[-\frac{\cos\alpha - i\sin\alpha}{1 - x(\cos\alpha + i\sin\alpha)} + \frac{\cos\alpha - i\sin\alpha}{1 - x(\cos\alpha - i\sin\alpha)} \right] \\ &= \frac{ix}{2} \left[-\sum_{n=0}^{\infty} x^n (\cos\alpha + i\sin\alpha)^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} x^n (\cos\alpha - i\sin\alpha)^{n+1} \right] \\ &= \frac{ix}{2} \sum_{n=0}^{\infty} x^n [-\cos(n+1)\alpha - i\sin(n+1)\alpha + \cos(n+1)\alpha - i\sin(n+1)\alpha] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} \sin(n+1)\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sin n\alpha,\end{aligned}$$

其中 $|x| < 1$.

*) 译本为 $\frac{\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}$, 两者答案实质上是相同的.

【2865】 $\frac{x\operatorname{sh}\alpha}{1-2x\operatorname{ch}\alpha+x^2}$.

解
$$\begin{aligned}\frac{x\operatorname{sh}\alpha}{1-2x\operatorname{ch}\alpha+x^2} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\operatorname{ch}\alpha + \operatorname{sh}\alpha}{x - (\operatorname{ch}\alpha + \operatorname{sh}\alpha)} - \frac{\operatorname{ch}\alpha - \operatorname{sh}\alpha}{x - (\operatorname{ch}\alpha - \operatorname{sh}\alpha)} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{e^\alpha}{x - e^\alpha} - \frac{e^{-\alpha}}{x - e^{-\alpha}} \right] = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{1 - xe^{-\alpha}} + \frac{1}{1 - xe^\alpha} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[-\sum_{n=0}^{\infty} x^n e^{-n\alpha} + \sum_{n=0}^{\infty} x^n e^{n\alpha} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \operatorname{sh} n\alpha,\end{aligned}$$

其中 $|x| < \min(e^{-\alpha}, e^\alpha) = e^{-|\alpha|}$.

【2866】 $\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

解
$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} &= (1-x^2)^{-\frac{3}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{3}{2}-n+1\right)}{n!} (-x^2)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!} x^{2n} \quad (|x| < 1).\end{aligned}$$

【2867】 $\ln(1+x+x^2+x^3)$.

解 $\ln(1+x+x^2+x^3) = \ln[(1+x)(1+x^2)] = \ln(1+x) + \ln(1+x^2)$.

但

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad (-1 < x \leq 1),$$

$$\ln(1+x^2) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{n} \quad (-1 \leq x \leq 1),$$

故当 $-1 < x \leq 1$ 时,有

$$\begin{aligned} \ln(1+x+x^2+x^3) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{n} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{x^m}{m} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{[\frac{m}{2}]-1} [1+(-1)^m] \frac{x^m}{m} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} + (-1)^{[\frac{m}{2}]-1} [1+(-1)^m]}{m} x^m. \end{aligned}$$

【2868】 $e^{x \cos a} \cos(x \sin a)$

解 首先注意到

$$e^{x \cos a + i x \sin a} = e^{x(\cos a + i \sin a)} = e^{x e^{ia}}$$

的实部就是 $e^{x \cos a} \cos(x \sin a)$. 为此,先求 $e^{x e^{ia}}$:

$$e^{x e^{ia}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x e^{ia})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} e^{ina} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} (\cos na + i \sin na),$$

比较上式两端的实部,即得

$$e^{x \cos a} \cos(x \sin a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos na}{n!} x^n \quad (|x| < +\infty).$$

比较虚部,还可得到

$$e^{x \cos a} \sin(x \sin a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin na}{n!} x^n \quad (|x| < +\infty).$$

首先展开导数,然后用逐项积分的方法求下列函数的幂级数展开式.

【2869】 $f(x) = \arctan x$, 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ 的和.

$$\text{解 } \arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

这里逐项积分的条件是满足的.事实上,当 $t \in [0, x]$ 且 $|x| < 1$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}$ 是一致收敛的,并且各项均连续.以下各题类似,不再一一说明.上述级数的收敛区间为 $|x| < 1$, 当 $|x| = 1$ 时,为交错级数,且满足莱布尼茨判别法的条件,故在端点 $x = \pm 1$ 处,级数均收敛.因此,级数的收敛域为 $|x| \leq 1$, 在其上展式成立.

令 $x=1$, 即得

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

【2870】 $f(x) = \arcsin x$.

$$\text{解 } \arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^x \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} t^{2n} \right] dt = x + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right],$$

收敛区间为 $|x| < 1$. 当 $|x| = 1$ 时, 利用 2604 题的结果, 由于 $\frac{p}{2} + q = \frac{1}{2} + 1 > 1$, 故级数收敛. 因此, 级数的收敛域为 $|x| \leq 1$, 在其上展式成立.

【2871】 $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

$$\begin{aligned} \text{解 } \ln(x + \sqrt{1+x^2}) &= \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \int_0^x \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} t^{2n} \right] dt \\ &= x + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right], \end{aligned}$$

收敛区间为 $|x| < 1$. 当 $|x| = 1$ 时, 级数为绝对收敛. 因此, 级数的收敛域为 $|x| \leq 1$, 在其上展式成立.

【2872】 $f(x) = \ln(1 - 2x\cos\alpha + x^2)$.

$$\begin{aligned}\text{解 } \ln(1 - 2x\cos\alpha + x^2) &= \int_0^x \frac{2t - 2\cos\alpha}{1 - 2t\cos\alpha + t^2} dt = -2 \int_0^x \left(\frac{1}{t} \frac{t\cos\alpha - t^2}{1 - 2t\cos\alpha + t^2} \right) dt \\ &= -2 \int_0^x \left(\frac{1}{t} \sum_{n=1}^{\infty} t^n \cos n\alpha \right) dt = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n} x^n,\end{aligned}$$

收敛区间为 $|x| < 1$. 当 $|x| = 1$ 时, 由 2698 题知, 对于 $0 < \alpha < \pi$, 级数收敛. 因此, 当 $0 < \alpha < \pi$ 时, 级数的收敛域为 $|x| \leq 1$. 但当 $\alpha = 0$ 且 $x = 1$ 时, 级数发散; 当 $\alpha = 0$ 且 $x = -1$ 时, 级数条件收敛; 当 $\alpha = \pi$ 且 $x = 1$ 时, 级数条件收敛; 当 $\alpha = \pi$ 且 $x = -1$ 时, 级数发散.

*) 利用 2863 题的结果.

【2873】 利用不同方法, 求下列函数的幂级数展开式:

- (1) $f(x) = (1+x)\ln(1+x)$; (2) $f(x) = \frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2}\arctan x$;
(3) $f(x) = \arctan\frac{2-2x}{1+4x}$; (4) $f(x) = \arctan\frac{2x}{2-x^2}$;
(5) $f(x) = x\arctan x - \ln\sqrt{1+x^2}$; (6) $f(x) = \arccos(1-2x^2)$;
(7) $f(x) = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$; (8) $f(x) = x\ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$.

$$\text{解 (1) } f(x) = (1+x) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} \quad (|x| < 1),$$

当 $|x| = 1$ 时, 级数收敛. 因此, 级数的收敛域为 $|x| \leq 1$.

$$(2) f(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1} \quad (|x| < 1).$$

*) 利用 2857 题的结果.

* *) 利用 2869 题的结果.

$$(3) \text{ 由于 } f'(x) = \left(\arctan \frac{2-2x}{1+4x} \right)' = -\frac{2}{1+4x^2}, \text{ 故}$$

$$\begin{aligned}\arctan \frac{2-2x}{1+4x} &= -2 \int_0^x \frac{dt}{1+4t^2} + \arctan 2 = -2 \int_0^x \left[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (4t^2)^{n-1} \right] dt + \arctan 2 \\ &= \arctan 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1}}{2n-1} x^{2n-1} \quad (|x| < \frac{1}{2}).\end{aligned}$$

当 $|x| = \frac{1}{2}$ 时, 级数为交错级数, 且满足莱布尼茨判别法的条件, 故收敛. 因此, 级数的收敛域为 $|x| \leq \frac{1}{2}$.

$$(4) \text{ 由于 } f'(x) = \left(\arctan \frac{2x}{2-x^2} \right)' = \frac{4+2x^2}{4+x^4}, \text{ 故}$$

$$\begin{aligned}\arctan \frac{2x}{2-x^2} &= \int_0^x \frac{4+2t^2}{4+t^4} dt = \int_0^x \left[\left(1 + \frac{t^2}{2} \right) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{t^4}{4} \right)^n \right] dt \\ &= \int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{t^2}{2} \right)^{2n+1} \right] dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{2^n(2n+1)} \quad (|x| < \sqrt{2}).\end{aligned}$$

当 $|x| = \sqrt{2}$ 时, 级数为

$$\sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} \quad \text{及} \quad -\sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1},$$

它们均由两收敛级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{4n+1} \quad \text{及} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{4n+3}$$

逐项相加并分别乘以常数 $\sqrt{2}$ 及 $-\sqrt{2}$ 而得, 故它们收敛. 因此, 原级数的收敛域为 $|x| \leq \sqrt{2}$.

$$(5) f(x) = x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{n}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{2n-1} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{2n(2n+1)} \quad (|x| < 1).
\end{aligned}$$

当 $|x|=1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n(2n+1)}$ 收敛. 因此, 级数的收敛域为 $|x| \leq 1$.

*) 利用 2869 题的结果.

(6) 由于 $f'(x) = [\arccos(1-2x^2)]' = \frac{2\operatorname{sgn}x}{\sqrt{1-x^2}}$ 及 $f(0)=0$, 故

$$\begin{aligned}
\arccos(1-2x^2) &= 2\operatorname{sgn}x \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = 2\operatorname{sgn}x \cdot \int_0^x \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} t^{2n} \right] dt \\
&= 2\operatorname{sgn}x \cdot \left[x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right] \\
&= 2|x| \cdot \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n}}{2n+1} \right) \right] \quad (|x| < 1). \tag{1'}
\end{aligned}$$

当 $|x|=1$ 时, 级数为

$$2 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{2n+1} \right) \right].$$

对于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{2n+1} \right]$$

应用拉比判别法:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2 + 5n}{(2n+1)^2} = \frac{3}{2} > 1,$$

即知它是收敛的. 因此, 级数 (1') 的收敛域为 $|x| \leq 1$.

$$\begin{aligned}
(7) \quad f(x) &= x \left[x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right]^{*1} + \left[1 - \frac{x^2}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} x^{2n+2} \right] \\
&= 1 + \frac{x^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} \frac{x^{2n+2}}{2n+1} \quad (|x| < 1).
\end{aligned}$$

当 $|x|=1$ 时, 对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} \frac{1}{2n+1} \right]$ 应用拉比判别法:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10n^2 + 11n}{(2n+1)^2} = \frac{5}{2} > 1,$$

即知它是收敛的. 因此, 原级数的收敛域为 $|x| \leq 1$.

*) 利用 2870 题的结果.

$$\begin{aligned}
(8) \quad f(x) &= x \left[x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right]^{*1} - \left[1 + \frac{1}{2}x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} x^{2n+2} \right] \\
&= -1 + \frac{x^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} \frac{x^{2n+2}}{2n+1} \right] \quad (|x| \leq 1).
\end{aligned}$$

*) 利用 2871 题的结果.

【2874】 利用展开式

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \dots$$

的唯一性, 求下列函数的 n 阶导数: (1) $f(x) = e^{x^2}$; (2) $^+ f(x) = e^{\frac{x}{2}}$; (3) $^+ f(x) = \arctan x$.

解 (1) $f(x+h) - f(x) = e^{(x+h)^2} - e^{x^2} = e^{x^2} (e^{2xh+h^2} - 1)$

$$= e^{x^2} \left[(2xh+h^2) + \frac{1}{2!} (2xh+h^2)^2 + \dots + \frac{1}{n!} (2xh+h^2)^n + \dots \right],$$

其中 h^n 的系数为

$$\begin{aligned} & e^{x^2} \left[\frac{1}{n!} (2x)^n + \frac{1}{(n-1)!} C_{n-1}^1 (2x)^{n-2} + \frac{1}{(n-2)!} C_{n-2}^2 (2x)^{n-4} + \dots \right] \\ &= \frac{e^{x^2}}{n!} \left[(2x)^n + \frac{n(n-1)}{1!} (2x)^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!} (2x)^{n-4} + \dots \right]. \end{aligned}$$

将 $f(x+h)-f(x)$ 的展开式中 h^n 的系数 $\frac{f^{(n)}(x)}{n!}$ 与之比较, 即得

$$\begin{aligned} (e^{x^2})^{(n)} &= e^{x^2} \left[(2x)^n + \frac{n(n-1)}{1!} (2x)^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!} (2x)^{n-4} + \dots \right] \\ (2) \quad f(x+h)-f(x) &= e^{\frac{a}{x+h}} - e^{\frac{a}{x}} = e^{\frac{a}{x}} (e^{-\frac{ah}{x(x+h)}} - 1) = e^{\frac{a}{x}} (e^{1+\frac{h}{x}} - 1) \\ &= e^{\frac{a}{x}} \left[e^{-\frac{ah}{x^2} + \frac{ah^2}{x^3} - \frac{ah^3}{x^4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{ah^{n+1}}{x^{n+2}} + \dots} - 1 \right] \\ &= e^{\frac{a}{x}} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{ah^{n+1}}{x^{n+2}} \right]^m \right\} \\ &= e^{\frac{a}{x}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^m}{m! x^m} \sum_{k_1=0}^{\infty} (-1)^{k_1+1} \left(\frac{h}{x}\right)^{k_1+1} \sum_{k_2=0}^{\infty} (-1)^{k_2+1} \left(\frac{h}{x}\right)^{k_2+1} \dots \sum_{k_m=0}^{\infty} (-1)^{k_m+1} \left(\frac{h}{x}\right)^{k_m+1} \\ &= e^{\frac{a}{x}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^m}{m! x^m} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k_1+\dots+k_m=i} (-1)^{k_1+\dots+k_m+m} \left(\frac{h}{x}\right)^{k_1+\dots+k_m+m} \\ &= e^{\frac{a}{x}} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^m a^m}{m! x^m} \left(\frac{h}{x}\right)^m \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{k_1+\dots+k_m=i} 1 \right) (-1)^i \left(\frac{h}{x}\right)^i \right] \\ &= e^{\frac{a}{x}} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^m a^m}{m! x^m} \left(\frac{h}{x}\right)^m \sum_{i=0}^{\infty} C_{i+m-1}^i (-1)^i \left(\frac{h}{x}\right)^i \right]^{*}) \\ &= e^{\frac{a}{x}} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+i} a^m}{m! x^m} \left(\frac{h}{x}\right)^{m+i} C_{i+m-1}^i = e^{\frac{a}{x}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{i+m=n \\ i \geq 0, m \geq 1}} \frac{(-1)^n a^m}{m! x^m} \left(\frac{h}{x}\right)^n C_{n-1}^{i-1} \\ &= e^{\frac{a}{x}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^n} \left(\frac{h}{x}\right)^n \sum_{\substack{i+m=n \\ i \geq 0, m \geq 1}} C_{n-1}^{i-1} x^{s-m} \frac{a^m}{m!} \\ &= e^{\frac{a}{x}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^{2n}} h^n \sum_{s=0}^{n-1} C_{n-1}^s \frac{x^s a^{n-s}}{(n-s)!} = e^{\frac{a}{x}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} A_n h^n, \end{aligned}$$

其中 $A_n = \frac{(-1)^n}{x^{2n}} \sum_{s=0}^{n-1} s! C_n^s C_{n-1}^{s-1} a^{n-s} x^s$.

于是, 比较 h^n 的系数, 即得

$$\begin{aligned} (e^{\frac{a}{x}})^{(n)} &= \frac{(-1)^n}{x^{2n}} e^{\frac{a}{x}} \sum_{s=0}^{n-1} s! C_n^s C_{n-1}^{s-1} a^{n-s} x^s \\ &= \frac{(-1)^n}{x^{2n}} e^{\frac{a}{x}} \left[a^n + \frac{n(n-1)}{1!} a^{n-1} x + \frac{n(n-1) \cdot (n-1)(n-2)}{2!} a^{n-2} x^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{n(n-1)(n-2) \cdot (n-1)(n-2)(n-3)}{3!} a^{n-3} x^3 + \dots \right] \end{aligned}$$

*) 其中 $\sum_{\substack{k_1+\dots+k_m=i \\ k_1 \geq 0, \dots, k_m \geq 0}} 1 = C_{i+m-1}^i$ 推导如下:

令 $|t| < 1$, 一方面由 $\frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k$ 得

$$\left(\frac{1}{1-t}\right)^m = \sum_{k_1=0}^{\infty} t^{k_1} \sum_{k_2=0}^{\infty} t^{k_2} \dots \sum_{k_m=0}^{\infty} t^{k_m} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k_1+\dots+k_m=i} t^{k_1+k_2+\dots+k_m} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{k_1+\dots+k_m=i} 1 \right) t^i = \sum_{i=0}^{\infty} P_i t^i,$$

其中 $P_i = \sum_{k_1+\dots+k_m=i} 1$. 另一方面, 又由

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{1-t}\right)^m &= (1-t)^{-m} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-m)(-m-1)\cdots(-m-s+1)}{s!} (-1)^s t^s \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{m(m+1)\cdots(m+s-1)}{s!} t^s = \sum_{s=0}^{\infty} C_{m+s-1} t^s,\end{aligned}$$

由幂级数展开的唯一性, 即知 $P_s = C_{m+s-1}$.

(3) 根据 $\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$, 令 $y = \frac{\frac{h}{1+x^2}}{1+\frac{x}{1+x^2}h}$, 就有 $\frac{x+y}{1-xy} = x+h$. 于是,

$$\begin{aligned}f(x+h) - f(x) &= \arctan(x+h) - \arctan x = \arctan \frac{x+y}{1-xy} - \arctan x = \arctan y \\ &= \arctan \left(\frac{h}{1+x^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{x}{1+x^2}h} \right).\end{aligned}$$

由 2869 题的结果知, 当 $|y| \leq 1$ 时, 有

$$\arctan y = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{y^{2m+1}}{2m+1}.$$

而当 h 很小 (且 $|x| \leq 1$) 时, 有

$$y = \frac{h}{1+x^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{x}{1+x^2}h} = \frac{h}{1+x^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{x}{1+x^2} h \right)^k.$$

于是,

$$\begin{aligned}f(x+h) - f(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{2m+1} \left[\frac{h}{1+x^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{x}{1+x^2} h \right)^k \right]^{2m+1} \\ &= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{2m+1} \left(\frac{h}{1+x^2} \right)^{2m+1} \cdot \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_m=0}^{\infty} (-1)^{k_1+k_2+\cdots+k_m} \left(\frac{xh}{1+x^2} \right)^{k_1+k_2+\cdots+k_m} \\ &= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{2m+1} \left(\frac{h}{1+x^2} \right)^{2m+1} \cdot \sum_{s=0}^{\infty} \left(\sum_{k_1+\cdots+k_m=s} 1 \right) (-1)^s \left(\frac{xh}{1+x^2} \right)^s \\ &= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^{m+s} \frac{1}{2m+1} \left(\frac{h}{1+x^2} \right)^{2m+1+s} x^s (-1)^s C_{m+s-1} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{m+s=n \\ m \geq 1, s \geq 0}} (-1)^{m+s} \left(\frac{h}{1+x^2} \right)^{2m+1+s} \frac{x^s}{2m+1} C_{m+s-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{h}{1+x^2} \right)^n A_n,\end{aligned}$$

$$\text{其中 } A_n = \sum_{\substack{m+s=n \\ m \geq 1, s \geq 0}} \frac{x^s}{2m+1} C_{m+s-1} = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{x^s}{2(n-s)+1} C_{n-1} \quad (n=1, 2, \cdots).$$

因此, 比较 h^n 的系数, 即得

$$\begin{aligned}(\arctan x)^{(n)} &= (-1)^n \frac{n!}{(1+x^2)^n} A_n = (-1)^n \frac{n!}{(1+x^2)^n} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{x^s}{2(n-s)+1} C_{n-1} \\ &= (-1)^n \frac{n!}{(1+x^2)^n} \left[\frac{1}{3} x^{n-1} + \frac{1}{5} (n-1) x^{n-2} + \cdots \right].\end{aligned}$$

【2875】 依二项式 $x+1$ 的正整数次幂展开函数 $f(x) = \ln \frac{1}{2+2x+x^2}$.

$$\text{解 } f(x) = -\ln[1+(x+1)^2] = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} (x+1)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+1)^{2n}}{n},$$

收敛域为 $|x+1| \leq 1$ 或 $-2 \leq x \leq 0$.

【2876】 把函数 $f(x) = \frac{1}{1-x}$ 按变量 x 的负整数次幂展开成幂级数.

提示 注意 $f(x) = \frac{1}{1-x} = -\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{x}} \quad (|x| > 1).$

解 $f(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\frac{1}{x}-1} = -\frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n} \quad (|x| > 1).$

【2877】 把函数 $f(x) = \ln x$ 按分式 $\frac{x-1}{x+1}$ 的正整数次幂展开成幂级数.

提示 注意 $f(x) = \ln x = \ln \frac{1+\frac{x-1}{x+1}}{1-\frac{x-1}{x+1}} \quad (x > 0)$, 并利用 2857 题的结果.

解 $f(x) = \ln \frac{1+\frac{x-1}{x+1}}{1-\frac{x-1}{x+1}} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1} \quad (x > 0).$

*) 利用 2857 题的结果.

【2878】 把函数 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$ 按分式 $\frac{x}{1+x}$ 的正整数次幂展开成幂级数.

解 $f(x) = \frac{x}{1+x} \sqrt{1+x} = \frac{x}{1+x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{1+x}}} = \frac{x}{1+x} \left(1 - \frac{x}{1+x}\right)^{-\frac{1}{2}}$
 $= \frac{x}{1+x} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(\frac{x}{1+x}\right)^n\right] = \frac{x}{1+x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(\frac{x}{1+x}\right)^{n+1},$

当 $\left|\frac{x}{1+x}\right| < 1$ 即当 $x > -\frac{1}{2}$ 时, 级数收敛. 当 $x = -\frac{1}{2}$ 时, 由 2689 题的结果知, 它条件收敛. 因此, 级数的收敛域为 $x \geq -\frac{1}{2}$.

【2879】 设 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, 直接证明: $f(x)f(y) = f(x+y)$.

证 $f(x)f(y) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \frac{x^{n_1}}{(n_1)!} \sum_{n_2=0}^{\infty} \frac{y^{n_2}}{(n_2)!} = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \frac{1}{(n_1)!(n_2)!} x^{n_1} y^{n_2}$
 $= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1+n_2=n} \frac{1}{(n_1)!(n_2)!} x^{n_1} y^{n_2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{n_1+n_2=n} \frac{n!}{(n_1)!(n_2)!} x^{n_1} y^{n_2} \right)$
 $= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{n_1=0}^n C_n^{n_1} x^{n_1} y^{n-n_1} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x+y)^n = f(x+y).$

上述级数在 $|x| < +\infty$ 及 $|y| < +\infty$ 上绝对收敛, 故重新组合是允许的.

事实上, $f(x) = e^x$, 等式 $f(x)f(y) = f(x+y)$ 即为指数函数的特征.

【2880】 若我们定义

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

证明: (1) $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$; (2) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

证 由于 $\sin x$ 及 $\cos x$ 的幂级数展开式在 $|x| < +\infty$ 内绝对收敛, 故级数相乘或相加、减均仍绝对收敛, 且可重新组合. 因此, 以下的级数运算都是合理的.

(1) $\sin x \cos x = \sum_{n_1=0}^{\infty} (-1)^{n_1} \frac{x^{2n_1+1}}{(2n_1+1)!} \sum_{n_2=0}^{\infty} (-1)^{n_2} \frac{x^{2n_2}}{(2n_2)!}$
 $= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{n_1+n_2=n \\ n_1 \geq 0, n_2 \geq 0}} (-1)^{n_1+n_2} \frac{x^{2n_1+2n_2+1}}{(2n_1+1)!(2n_2)!}$
 $= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n x^{2n+1} \sum_{\substack{n_1+n_2=n \\ n_1 \geq 0, n_2 \geq 0}} \frac{1}{(2n_1+1)!(2n_2)!} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A_n x^{2n+1},$

$$\begin{aligned}
\text{其中 } A_n &= \sum_{\substack{n_1+n_2=n \\ n_1 \geq 0, n_2 \geq 0}} \frac{1}{(2n_1+1)!(2n_2)!} = \sum_{\substack{(2n_1+1)+(2n_2)=2n+1 \\ n_1 \geq 0, n_2 \geq 0}} \frac{1}{(2n_1+1)!(2n_2)!} \\
&= \frac{1}{(2n+1)!} \sum_{\substack{k_1+k_2=2n+1 \\ k_1-\text{奇数} \\ k_2-\text{偶数}}} \frac{(2n+1)!}{(k_1)!(k_2)!} = \frac{1}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{2} \left(\sum_{k_1 \text{ 奇}, k_2 \text{ 偶}} + \sum_{k_1 \text{ 偶}, k_2 \text{ 奇}} \right) \\
&= \frac{1}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(2n+1)!}{k!(2n+1-k)!} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2n+1)!} 2^{2n+1}.
\end{aligned}$$

$$\text{从而得 } \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{1}{2} \sin 2x.$$

$$(2) \sin^2 x + \cos^2 x$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} (-1)^{n_1+n_2} \frac{x^{2(n_1+n_2)+2}}{(2n_1+1)!(2n_2+1)!} + \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} (-1)^{k_1+k_2} \frac{x^{2(k_1+k_2)}}{(2k_1)!(2k_2)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n x^{2n+2} \sum_{\substack{n_1+n_2=n \\ n_1 \geq 0, n_2 \geq 0}} \frac{1}{(2n_1+1)!(2n_2+1)!} \right] + \sum_{m=0}^{\infty} \left[(-1)^m x^{2m} \sum_{\substack{k_1+k_2=m \\ k_1 \geq 0, k_2 \geq 0}} \frac{1}{(2k_1)!(2k_2)!} \right] \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} + \sum_{n=0}^{\infty} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} x^{2n+2} A_n,
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
A_n &= \sum_{\substack{k_1+k_2=n+1 \\ k_1 \geq 0, k_2 \geq 0}} \frac{1}{(2k_1)!(2k_2)!} - \sum_{\substack{n_1+n_2=n \\ n_1 \geq 0, n_2 \geq 0}} \frac{1}{(2n_1+1)!(2n_2+1)!} \\
&= \frac{1}{(2n+2)!} \left[\sum_{\substack{2k_1+2k_2=2n+2 \\ k_1 \geq 0, k_2 \geq 0}} \frac{(2n+2)!}{(2k_1)!(2k_2)!} - \sum_{\substack{(2n_1+1)+(2n_2+1)=2n+2 \\ n_1 \geq 0, n_2 \geq 0}} \frac{(2n+2)!}{(2n_1+1)!(2n_2+1)!} \right] \\
&= \frac{1}{(2n+2)!} \left[\sum_{k'=0,2,\dots,2n+2} C_{2n+2}^{k'} - \sum_{l=1,3,\dots,2n+1} C_{2n+2}^l \right] \\
&= \frac{1}{(2n+2)!} \left[\sum_{s=0,2,\dots,2n+2} (-1)^s C_{2n+2}^s + \sum_{s=1,3,\dots,2n+1} (-1)^s C_{2n+2}^s \right] \\
&= \frac{1}{(2n+2)!} \sum_{s=0}^{2n+2} (-1)^s C_{2n+2}^s = \frac{1}{(2n+2)!} [1 + (-1)^{2n+2}] = 0 \quad (n=0,1,2,\dots).
\end{aligned}$$

因而得 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad (|x| < +\infty)$.

【2881】 写出函数 $f(x) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} \right]^{-1}$ 的幂级数展开式中的若干项.

$$\begin{aligned}
\text{解 } f(x) &= \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \dots \right)^{-1} \\
&= 1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \dots \right) + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \dots \right)^2 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \dots \right)^3 + \dots \\
&= 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} - \frac{x^3}{24} - \dots \quad (|x| < 1).
\end{aligned}$$

对幂级数进行相应的运算,从而求出下列函数的幂级数展开式:

$$\text{【2882】 } f(x) = (1+x)e^{-x}.$$

$$\begin{aligned}
\text{解 } f(x) &= (1+x) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{n!} + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \right] x^n \\
&= 1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n-1}{n!} x^n \quad (|x| < +\infty).
\end{aligned}$$

$$\text{【2883】 } f(x) = (1-x)^2 \operatorname{ch} \sqrt{x}.$$

解 当 $x \geq 0$ 时,

$$\operatorname{ch} \sqrt{x} = \frac{e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{n!} + \frac{(-1)^n}{n!} \right] x^{\frac{n}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!},$$

当 $x < 0$ 时, 易知 $\operatorname{ch} \sqrt{x} = \cos \sqrt{|x|}$, 从而,

$$\operatorname{ch} \sqrt{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\sqrt{|x|})^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!},$$

故 $\operatorname{ch} \sqrt{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!} (|x| < +\infty)$. 于是,

$$f(x) = (1 - 2x + x^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!} = 1 - \frac{3}{2}x + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{1}{(2n)!} - \frac{2}{(2n-2)!} + \frac{1}{(2n-4)!} \right] x^n$$

($|x| < +\infty$).

【2884】 $f(x) = \ln^2(1-x)$.

解 $f(x) = \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots \right)^2$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{1 \cdot n} + \frac{1}{2(n-1)} + \frac{1}{3(n-2)} + \dots + \frac{1}{n \cdot 1} \right] x^{n+1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{n} \right) \frac{1}{n+1} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n-1} \right) \frac{1}{n+1} + \dots + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{1} \right) \frac{1}{n+1} \right] x^{n+1}$$

$$= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (|x| < 1).$$

当 $x = -1$ 时, 级数为

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}.$$

由于

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) \frac{1}{n+1} > \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) \frac{1}{n+2} \quad (n=2, 3, \dots),$$

并且有

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) \frac{1}{n+1} = \frac{C + \ln n + \epsilon_n}{n+1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

故它是收敛的.

当 $x = 1$ 时, 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C}{n+1}$ 发散且原级数为正项级数, 故 $2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) \frac{1}{n+1}$ 也发散. 因此, 级数

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

的收敛域为 $-1 \leq x < 1$.

*) 利用 146 题的结果.

【2885】 $f(x) = (1+x^2) \arctan x$.

$$\begin{aligned} \text{解 } f(x) &= (1+x^2) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) x^{2n+1} \\ &= x + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1} x^{2n+1} \quad (|x| \leq 1). \end{aligned}$$

*) 利用 2869 题的结果.

【2886】 $f(x) = e^x \cos x$.

提示 注意 $e^x (\cos x + i \sin x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} 2^{\frac{n}{2}} \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right)$.

解 $e^x \cos x$ 为 $e^x (\cos x + i \sin x)$ 的实部. 由于

$$e^x (\cos x + i \sin x) = e^x e^{ix} = e^{(1+i)x}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [(1+i)x]^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} (1+i)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right]^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} 2^{\frac{n}{2}} \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right), \end{aligned}$$

比较上式两端的实部, 即得 $e^x \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n\pi}{4}}{n!} x^n \quad (|x| < +\infty)$.

【2887】 $f(x) = e^x \sin x$.

提示 利用 2886 题的等式.

解 利用 2886 题的等式, 并比较此等式两端的虚部, 即得

$$e^x \sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{n\pi}{4}}{n!} x^n \quad (|x| < +\infty).$$

【2888】 $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$.

$$\begin{aligned} \text{解 } f(x) &= \sum_{n_1=0}^{\infty} (-1)^{n_1} x^{n_1} \sum_{n_2=0}^{\infty} (-1)^{n_2} \frac{x^{n_2+1}}{n_2+1} \\ &= \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} (-1)^{n_1+n_2} \frac{x^{n_1+n_2+1}}{n_2+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n x^{n+1} \sum_{\substack{n_1+n_2=n \\ n_1 \geq 0, n_2 \geq 0}} \frac{1}{n_2+1} \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right) x^n \right] \quad (|x| < 1). \end{aligned}$$

当 $|x|=1$ 时, 通项的绝对值 ≥ 1 , 显然发散. 因此, 级数的收敛域为 $|x| < 1$.

【2889】 $f(x) = (\arctan x)^2$.

$$\begin{aligned} \text{解 } f(x) &= \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots \right)^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left[\frac{1}{(2n-1) \cdot 1} + \frac{1}{(2n-3) \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{1 \cdot (2n-1)} \right] x^{2n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left[\left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{1} \right) \frac{1}{2n} + \left(\frac{1}{2n-3} + \frac{1}{3} \right) \frac{1}{2n} + \cdots + \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2n-1} \right) \frac{1}{2n} \right] x^{2n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} \right) \frac{x^{2n}}{n} \quad (|x| \leq 1), \end{aligned}$$

*) 利用 2869 题的结果.

【2890】 $f(x) = \left(\frac{\arcsin x}{x} \right)^2$.

解 令 $\varphi(x) = (\arcsin x)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (-1 < x < 1)$, 则

$$\varphi'(x) = \frac{2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \quad (-1 < x < 1).$$

由于 $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$, 故 $a_0 = a_1 = 0$. 由 $\sqrt{1-x^2} \varphi'(x) = 2 \arcsin x$ 得

$$\sqrt{1-x^2} \varphi''(x) - \frac{x \varphi'(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1).$$

即

$$(1-x^2) \varphi''(x) - x \varphi'(x) = 2 \quad (-1 < x < 1),$$

将 $\varphi(x)$ 的展开式代入, 并注意到 $a_0 = a_1 = 0$, 可得

$$(1-x^2) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n a_n x^n = 2$$

或 $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n^2 a_n x^n = 2$, 也即

$$2a_2 + 6a_3 x + \sum_{n=2}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} - n^2 a_n] x^n = 2 \quad (-1 < x < 1).$$

比较上式 x 的同次幂的系数, 得

$$a_2 = 1, \quad a_3 = 0, \quad a_{n+2} = \frac{n^2}{(n+2)(n+1)} a_n \quad (n \geq 2).$$

从而可得

$$a_{2k-1} = 0, \quad a_{2k+2} = \frac{2[(2k)!!]^2}{(2k+2)!} = \frac{2^{2k+1}(k!)^2}{(2k+2)!} \quad (k=0, 1, 2, \dots).$$

于是,

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k+1}(k!)^2}{(2k+2)!} x^{2k+2} \quad (-1 < x < 1).$$

从而得

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k+1}(k!)^2}{(2k+2)!} x^{2k} \quad (-1 < x < 1).$$

显然右端的幂级数当 $x = \pm 1$ 时均收敛, 而左端的函数当 $x = \pm 1$ 时连续, 故由幂级数的阿贝尔定理知, 上述展式当 $x = 1$ 及 $x = -1$ 时也成立.

将下列函数按变量 x 的正整数次幂展开成幂级数, 写出展开式(异于零)的前三项:

【2891】 $f(x) = \tan x$.

解 解法 1: 直接应用泰勒公式, 先求导数, 有

$$\begin{aligned} f(x) &= \tan x, & f(0) &= 0; \\ f'(x) &= \sec^2 x, & f'(0) &= 1; \\ f''(x) &= 2\sec^2 x \tan x, & f''(0) &= 0; \\ f'''(x) &= 2\sec^4 x + 4\sec^2 x \tan^2 x, & f'''(0) &= 2; \\ f^{(4)}(x) &= 8\sec^4 x \tan x + 8\sec^2 x \tan^3 x + 8\sec^4 x \tan x, & f^{(4)}(0) &= 0; \\ f^{(5)}(x) &= 32\sec^4 x \tan^2 x + 8\sec^6 x + 16\sec^2 x \tan^4 x + 24\sec^4 x \tan^2 x + 32\sec^4 x \tan^2 x + 8\sec^6 x, \\ f^{(5)}(0) &= 16; \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\text{于是, } f(x) = x + \frac{2}{3!}x^3 + \frac{16}{5!}x^5 + \dots = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots \quad (|x| < \frac{\pi}{2}).$$

解法 2: 当 $|x| < \frac{\pi}{2}$ 时, 记 $\xi = 1 - \cos x$, 则 $|\xi| < 1$, 有

$$\begin{aligned} \tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} = \sin x \cdot \frac{1}{1-\xi} = \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} \frac{x^{2l-1}}{(2l-1)!} \sum_{m=0}^{\infty} \xi^m \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} \frac{x^{2l-1}}{(2l-1)!} + \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} \frac{x^{2l-1}}{(2l-1)!} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^m (-1)^{k+1} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \right]^m \\ &= x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} \frac{x^{2l-1}}{(2l-1)!} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_m=1}^{\infty} (-1)^{k_1+\dots+k_m+m} \frac{x^{2(k_1+\dots+k_m)}}{(2k_1)! \dots (2k_m)!} \\ &= x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{s=m}^{\infty} \sum_{k_1+\dots+k_m=s} (-1)^{s+l+m-1} \frac{x^{2s+2l-1}}{(2l-1)! (2k_1)! \dots (2k_m)!} \\ &= x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n-1} \cdot \sum_{\substack{l+s=n \\ l \geq 1}} \sum_{1 \leq m \leq s} \sum_{\substack{k_1+\dots+k_m=s \\ k_1 \geq 1, \dots, k_m \geq 1}} (-1)^m \frac{1}{(2l-1)! (2k_1)! \dots (2k_m)!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n x^{2n-1}, \end{aligned}$$

其中 $A_1=1$, 而当 $n \geq 2$ 时, 有

$$A_n = (-1)^{n-1} \left[\frac{1}{(2n-1)!} + \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{1 \leq m \leq l} \sum_{\substack{k_1+\dots+k_m=n-l \\ k_1 \geq 1, \dots, k_m \geq 1}} \frac{(-1)^m}{(2l-1)!(2k_1)!\dots(2k_m)!} \right].$$

例如, 当 $n=2$ ($l=1, s=1, m=1, k_1=1$) 时, 得

$$A_2 = \frac{1}{3};$$

当 $n=3$ ($l=2, s=1, m=1, k_1=1; l=1, s=2, m=1, k_1=2; l=1, s=2, m=2, k_1=1, k_2=1$) 时, 得

$$A_3 = \frac{1}{5!} + (-1) \frac{1}{3! 2!} + (-1) \frac{1}{4!} + \frac{1}{2! 2!} = \frac{2}{15},$$

等等. 于是, 有 $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots$ ($|x| < \frac{\pi}{2}$).

【2892】 $f(x) = \operatorname{th} x$.

解 运用幂级数展开式的唯一性定理, 为求展开式可以考虑在 $x=0$ 点附近作幂级数展开. 注意当 $|x|$ 很小, 且幂级数中常数项为零时, 其收敛的和是很小的. 于是, 以下的写法是可以的, 取其前三项, 有

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots}{1 + \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \right)} \\ &= \left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \right) \left[1 - \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \right) + \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \right)^2 - \dots \right] \\ &= \left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \right) \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{5x^4}{24} + \dots \right) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \dots \quad (|x| < \frac{\pi}{2}). \end{aligned}$$

如果详细一些, 可进一步叙述如下:

首先, 可有一特殊的幂级数 $\frac{e^x-1}{x} = 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \dots$. 如若 $|x| < \rho$ 且 $\frac{\frac{\rho}{2}}{1-\frac{\rho}{3}} = 1$, 例如, 取 $\rho = \frac{6}{5} = 1.2$ 时,

有 $\frac{\rho}{2!} + \frac{\rho^2}{3!} + \dots \leq 1$, 此时得

$$\frac{x}{e^x-1} = 1 - \frac{x}{2} + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + \dots \quad (|x| < 1.2).$$

易见 $A_3=0, A_5=0, A_7=0, \dots$. 于是, 上式可改写为

$$\frac{x}{e^x-1} = 1 - \frac{x}{2} + B_1 \cdot \frac{x^2}{2!} - B_2 \cdot \frac{x^4}{4!} + B_3 \cdot \frac{x^6}{6!} - \dots, \quad (1)$$

其中 B_1, B_2, B_3, \dots 为伯努利 (Bernoulli) 常数^{*)}, 有

$$B_1 = \frac{1}{6}, B_2 = \frac{1}{30}, B_3 = \frac{1}{42}, B_4 = \frac{1}{30}, B_5 = \frac{5}{66}, \dots.$$

由 $x \coth \frac{x}{2} = x \cdot \frac{e^x+1}{e^x-1} = \frac{2x}{e^x-1} + x$ 及 (1) 式, 即得

$$\frac{x}{2} \coth \frac{x}{2} = 1 + B_1 \frac{x^2}{2!} - B_2 \frac{x^4}{4!} + B_3 \frac{x^6}{6!} - \dots.$$

于是,

$$x \coth x = 1 + B_1 \frac{2^2 x^2}{2!} - B_2 \frac{2^4 x^4}{4!} + B_3 \frac{2^6 x^6}{6!} - \dots.$$

若 $x \neq 0$, 则

$$\coth x = \frac{1}{x} + B_1 \frac{2^2 x}{2!} - B_2 \frac{2^4 x^3}{4!} + B_3 \frac{2^6 x^5}{6!} - \dots. \quad (2)$$

注意到 $\operatorname{th} x = 2 \coth 2x - \coth x$ 及当 $x=0$ 时, $\operatorname{th} x=0$, 由 (2) 式即有

$$\operatorname{th} x = \frac{B_1}{2!} (2^4 - 2^2) x - \frac{B_2}{4!} (2^8 - 2^4) x^3 + \frac{B_3}{6!} (2^{12} - 2^6) x^5 - \dots = x - \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 - \frac{17}{315} x^7 + \dots. \quad (3)$$

还可指出的是,它的系数与 $\tan x$ 展开式相应项的系数的绝对值是相同的,两者相应各系数只是符号上有交错变异而已(可参看本题解末加注的 Bromwich 所著一书的相应章节),而 $\tan x$ 的幂级数展开式当 $|x| < \frac{\pi}{2}$ 时收敛,故上述的级数(3)当 $|x| < \frac{\pi}{2}$ 时收敛.

*) 参看 Bromwich 著 An introduction to the theory of infinite series 一书第十一章 100 款.

【2893】 $f(x) = \cot x - \frac{1}{x}$

解 与 2892 题的想法一样,可以考虑 $x \neq 0$ 且 $|x|$ 很小的情形. 于是,有

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots}{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots} - \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{x} \left\{ \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \right) \left[1 + \left(\frac{x^2}{3!} - \frac{x^4}{5!} + \frac{x^6}{7!} - \dots \right) + \left(\frac{x^2}{3!} - \frac{x^4}{5!} + \frac{x^6}{7!} - \dots \right)^2 + \dots \right] - 1 \right\} \\ &= \frac{1}{x} \left\{ \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \right) \left(1 + \frac{x^2}{6} + \frac{7}{360}x^4 + \frac{31}{15120}x^6 + \dots \right) - 1 \right\} \\ &= \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{45}x^4 - \frac{2}{945}x^6 - \dots \right) = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{45}x^3 - \frac{2}{945}x^5 - \dots \quad (0 < |x| < \pi). \end{aligned}$$

一般说来,为求通项可作如下进一步的讨论:

考虑当 $x \neq 0$ 时, $g(x) = xf(x) = x \cot x - 1$, 而当 $|x| < \pi$ 时,有

$$g(x) = x \cot x - 1 = \frac{\cos x}{\frac{\sin x}{x}} - 1 = \frac{\cos x}{1 - \xi} - 1,$$

其中 $\xi = 1 - \frac{\sin x}{x}$. 注意到 $|\sin x| < |x|$, 故 $|\xi| < 1$. 因而,

$$\begin{aligned} g(x) &= \cos x \sum_{m=0}^{\infty} \xi^m - 1 = \left[1 + \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \frac{x^{2l}}{(2l)!} \right] \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \xi^m \right) - 1 \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \xi^m + \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \frac{x^{2l}}{(2l)!} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \frac{x^{2l}}{(2l)!} \xi^m. \end{aligned}$$

由于 $\xi = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k}}{(2k+1)!}$, 故有

$$\begin{aligned} \xi^m &= \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} \dots \sum_{k_m=1}^{\infty} (-1)^{k_1+k_2+\dots+k_m+m} \frac{x^{2(k_1+k_2+\dots+k_m)}}{(2k_1+1)!(2k_2+1)!\dots(2k_m+1)!} \\ &= \sum_{s=m}^{\infty} \sum_{k_1+\dots+k_m=s} (-1)^{s+m} \frac{x^{2s}}{(2k_1+1)!\dots(2k_m+1)!}. \end{aligned}$$

从而,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \xi^m = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{1 \leq m \leq s} \sum_{\substack{k_1+\dots+k_m=s \\ k_1 \geq 1, \dots, k_m \geq 1}} (-1)^{s+m} \frac{x^{2s}}{(2k_1+1)!\dots(2k_m+1)!} = \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s A_s x^{2s},$$

其中

$$A_s = \sum_{1 \leq m \leq s} \sum_{\substack{k_1+\dots+k_m=s \\ k_1 \geq 1, \dots, k_m \geq 1}} \frac{(-1)^m}{(2k_1+1)!\dots(2k_m+1)!} \quad (s=1, 2, \dots).$$

又有

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \frac{x^{2l}}{(2l)!} \xi^m &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{s=m}^{\infty} \sum_{\substack{k_1+\dots+k_m=s \\ k_1 \geq 1, \dots, k_m \geq 1}} (-1)^{s+m+l} \frac{x^{2s+2l}}{(2l)!(2k_1+1)!\dots(2k_m+1)!} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n B_n x^{2n}, \end{aligned}$$

其中

$$B_n = \sum_{\substack{s+l=m \\ s \geq 1, l \geq 1}} \sum_{1 \leq m \leq s} \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_m = s \\ k_1 \geq 1, \dots, k_m \geq 1}} \frac{(-1)^m}{(2l)!(2k_1+1)! \cdots (2k_m+1)!} \quad (n=2,3,\dots).$$

于是,

$$g(x) = \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s A_s x^{2s} + \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \frac{x^{2l}}{(2l)!} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n B_n x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} P_n x^{2n},$$

其中

$$P_1 = -\left(A_1 + \frac{1}{2}\right), \quad P_n = (-1)^n \left[A_n + \frac{2}{(2n)!} + B_n\right] \quad (n=2,3,\dots).$$

因此,最后得知:当 $0 < |x| < \pi$ 时,有

$$f(x) = \frac{1}{x} g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n x^{2n-1}.$$

经计算可得前几项如下:

$$A_1 = -\frac{1}{6}, \quad A_2 = \frac{7}{360}, \quad A_3 = -\frac{31}{15120}, \quad B_2 = -\frac{1}{12}, \quad B_3 = \frac{1}{360}.$$

从而得

$$P_1 = -\frac{1}{3}, \quad P_2 = -\frac{1}{45}, \quad P_3 = -\frac{2}{945}.$$

因此有

$$f(x) = \cot x - \frac{1}{x} = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{45}x^3 - \frac{2}{945}x^5 - \dots.$$

【2894】 设 $\sec x$ 的展开式写为以下形式:

$$\sec x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{(2n)!} x^{2n}.$$

求出系数 E_n (欧拉数) 的递推公式.

解 在等式 $\sec x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{(2n)!} x^{2n}$ 的两端同乘 $\cos x$, 并注意 $\cos x$ 的展开式, 就有

$$\begin{aligned} 1 &= \cos x \sum_{s=0}^{\infty} \frac{E_s}{(2s)!} x^{2s} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{E_s}{(2s)!} x^{2s} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s+k=n} (-1)^k x^{2(k+s)} \frac{E_s}{(2k)!(2s)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{s+k=n} (-1)^k \frac{E_s}{(2k)!(2s)!} \right] x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^{2n}. \end{aligned}$$

根据幂级数展开式的唯一性, 就有 $A_0 = E_0 = 1$, 而 $A_n = 0$ ($n=1,2,\dots$), 其中

$$A_n = \sum_{k+s=n} (-1)^k \frac{E_s}{(2k)!(2s)!} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{E_{n-k}}{(2k)!(2n-2k)!},$$

故得递推关系

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{E_{n-k}}{(2k)!(2n-2k)!} = 0 \quad (n=1,2,\dots).$$

例如, 已知 E_0 , 由上式令 $n=1$, 即得 $E_1 - E_0 = 0$, 从而, $E_1 = E_0 = 1$. 由 E_0, E_1 , 令 $n=2$, 又可推出 E_2, \dots , 等等. 一般说来, 由 $E_0, E_1, E_2, \dots, E_{n-1}$, 从上式可推出 E_n .

【2895】 把函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2tx+x^2}}$ ($|x| < 1$) 展开成幂级数.

解 只要 $x^2 + 2|tx| < 1$, 函数 $f(x)$ 就有展开的可能性. 记 x^n 的系数为 $P_n(t)$, 则

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+x^2}} = 1 + P_1(t)x + P_2(t)x^2 + \dots + P_n(t)x^n + \dots, \quad (1)$$

下面我们只要确定 $P_n(t)$ 即可. 为此, 对 (1) 式两端同时对 x 求导数, 得

$$\frac{t-x}{(1-2tx+x^2)^{\frac{3}{2}}} = P_1(t) + 2P_2(t)x + \cdots + nP_n(t)x^{n-1} + \cdots.$$

把上式与(1)式比较,易得

$$(1-2tx+x^2)(P_1+2P_2x+\cdots+nP_nx^{n-1}+\cdots)=(t-x)(1+P_1x+P_2x^2+\cdots+P_nx^n+\cdots).$$

比较上式两端 x 的同次幂的系数,得

$$\begin{aligned} P_1(t) &= t, \quad 2P_2(t) - 2tP_1(t) = tP_1(t) - 1, \quad \cdots, \\ (n+1)P_{n+1}(t) - 2ntP_n(t) + (n-1)P_{n-1}(t) &= tP_n(t) - P_{n-1}(t). \end{aligned}$$

由此得

$$P_1(t) = t, \quad P_2(t) = \frac{3t^2-1}{2}, \quad \cdots, \quad P_{n+1}(t) = \frac{2n+1}{n+1}tP_n(t) - \frac{n}{n+1}P_{n-1}(t). \quad (2)$$

例如,取 $n=2$,则由 $P_1(t)$ 及 $P_2(t)$ 可推得

$$P_3(t) = \frac{5}{3}t \cdot \frac{3t^2-1}{2} - \frac{2}{3}t = \frac{5 \cdot 3}{3 \cdot 2}t^3 - \frac{3}{2}t = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3!} \left[t^3 - \frac{3 \cdot 2}{2(2 \cdot 3 - 1)}t \right].$$

一般说来,由(2)式用数学归纳法可递推得

$$P_n(t) = \frac{(2n-1)!!}{n!} \left[t^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}t^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)}t^{n-4} - \cdots \right] \quad (n \geq 1, \text{勒让德多项式}).$$

【2896】 设 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 写出函数 $F(x) = \frac{f(x)}{1-x}$ 的展开式.

$$\text{解 } F(x) = \sum_{n_1=0}^{\infty} a_{n_1} x^{n_1} \sum_{n_2=0}^{\infty} x^{n_2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{n_1+n_2=n \\ n_1 \geq 0, n_2 \geq 0}} a_{n_1} \right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k \right) x^n \quad (|x| < 1).$$

【2897】 若级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 有收敛半径 R_1 , 而级数 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 有收敛半径 R_2 , 则级数:

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n; \quad (2) \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n x^n$$

的收敛半径 R 是怎样的?

提示 利用柯西—阿达马公式即可求得: (1) $R \geq \min(R_1, R_2)$. (2) $R \geq R_1 R_2$.

解 (1) 记 $A_n = a_n + b_n$, 则有

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{|A_n|} &= \sqrt[n]{|a_n + b_n|} \leq \sqrt[n]{|a_n| + |b_n|} \leq \sqrt[n]{2 \max(|a_n|, |b_n|)} \\ &= \sqrt[n]{2} \sqrt[n]{\max(|a_n|, |b_n|)} = \sqrt[n]{2} \max(\sqrt[n]{|a_n|}, \sqrt[n]{|b_n|}). \end{aligned}$$

注意到 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} = 1$, 故有

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|A_n|} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \{ \sqrt[n]{2} \max(\sqrt[n]{|a_n|}, \sqrt[n]{|b_n|}) \} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \{ \max(\sqrt[n]{|a_n|}, \sqrt[n]{|b_n|}) \} \\ &= \max \{ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}, \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|} \} = \max \left(\frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2} \right), \end{aligned}$$

从而得 $R \geq \frac{1}{\max(\frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2})} = \min(R_1, R_2)$.

(2) 记 $B_n = a_n b_n$, 则有 $\sqrt[n]{|B_n|} = \sqrt[n]{|a_n b_n|} = \sqrt[n]{|a_n|} \sqrt[n]{|b_n|}$. 于是,

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|B_n|} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \{ \sqrt[n]{|a_n|} \sqrt[n]{|b_n|} \} \leq \{ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \} \{ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|} \} \\ &= \frac{1}{R_1} \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1 R_2}, \end{aligned}$$

故得 $R \geq R_1 R_2$.

【2898】 设 $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ 和 $L = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$. 证明: 幂级数的收敛半径 R 满足下列不等式 $l \leq R \leq L$.

证 记 $l_1 = \frac{1}{l}$, $L_1 = \frac{1}{L}$. 注意 $l \geq 0$, $L \geq 0$. 若 $l = 0$, 则记 $l_1 = +\infty$; 若 $l = +\infty$, 则记 $l_1 = 0$. 对 L 与 L_1 也作

同样规定. 易见 $L_1 \leq l_1$. 任给 $\epsilon > 0$, 总可选 $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$, 使

$$\frac{1}{1+\delta_1} = 1 - \frac{\epsilon}{2}, \quad \frac{1}{1-\delta_2} = 1 + \frac{\epsilon}{2}.$$

注意对 δ_1, δ_2 而言, 存在正整数 m , 使当 $n > m$ 时, 有

$$l(1-\delta_2) < \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| < L(1+\delta_1) \quad \text{或} \quad \frac{1}{L} \cdot \frac{1}{1+\delta_1} < \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < \frac{1}{l} \cdot \frac{1}{1-\delta_2},$$

即当 $n > m$ 时, 有

$$L_1 \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) < \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < l_1 \left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right).$$

易见当 $n > m$ 时, 有

$$\frac{|a_n|}{|a_m|} = \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|} \cdot \frac{|a_{n-1}|}{|a_{n-2}|} \cdots \frac{|a_{m+1}|}{|a_m|} < \left[l_1 \left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right) \right]^{n-m}$$

或

$$\frac{|a_n|}{L_1} < \left(\frac{|a_m|}{L_1^m} \right)^{\frac{1}{n}} \left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right). \quad (1)$$

同理可得

$$\frac{|a_n|}{L_1} > \left(\frac{|a_m|}{L_1^m} \right)^{\frac{1}{n}} \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right). \quad (2)$$

注意到若 $A > 0$, 则有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{A} = 1$, 故存在充分大的 $n_0 (> m)$, 使当 $n \geq n_0$ 时, 有

$$\left(\frac{|a_m|}{L_1^m} \right)^{\frac{1}{n}} < 1 + \frac{\frac{\epsilon}{2}}{1 + \frac{\epsilon}{2}} \quad \text{及} \quad \left(\frac{|a_m|}{L_1^m} \right)^{\frac{1}{n}} > 1 - \frac{\frac{\epsilon}{2}}{1 - \frac{\epsilon}{2}}. \quad (3)$$

将(3)式代入(1)式及(2)式, 即得

$$\frac{|a_n|}{L_1} < 1 + \epsilon \quad \text{及} \quad \frac{|a_n|}{L_1} > 1 - \epsilon.$$

于是, 有 $L_1(1-\epsilon) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} \leq l_1(1+\epsilon)$. 从而得

$$\frac{1}{l_1(1+\epsilon)} \leq R \leq \frac{1}{L_1(1-\epsilon)}, \quad \text{即} \quad \frac{l}{1+\epsilon} \leq R \leq \frac{L}{1-\epsilon}.$$

由 $\epsilon > 0$ 的任意性知, 即得 $l \leq R \leq L$.

*) 若 $L_1 = +\infty$, 即 $L = 0$, 此时显然有 $R = 0$ (级数除 $x_0 = 0$ 点收敛以外, 对任一点 $x \neq x_0$ 均发散), 故可设 $L_1 < +\infty$.

【2899】 证明: 若函数 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 且 $|n!a_n| < M$ ($n=1, 2, \dots$), 其中 M 是常数, 则:

(1) $f(x)$ 在任一点 a 无穷次可微; (2) 展开式 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$ ($|x| < +\infty$) 成立.

证 (1) 由于 $|n!a_n| < M$, 故有

$$|a_n| < \frac{M}{n!} \quad (n=1, 2, \dots).$$

设 $[-N, N]$ 是包含 x_0 的任一有限区间. 由于

$$|a_n(x-x_0)^n| < \frac{M}{n!} (2N)^n$$

及级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M}{n!} (2N)^n$ 收敛, 故由魏尔斯特拉斯判别法知, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 在包含 x_0 的任意有限区间上一致收敛, 即其收敛半径 $R = +\infty$. 于是, 此级数在任一点 $a \in (-\infty, +\infty)$ 无穷次可微.

(2) 由(1)段已证可知级数 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 在任何点无穷次可微, 故

$$f^{(m)}(x) = \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-m+1)a_n(x-x_0)^{n-m} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{n!}{(n-m)!} a_n (x-x_0)^{n-m} \quad (m=1,2,\cdots).$$

今设 $|x-a| < R$ (R 为任意固定的正数), 于是,

$$|x-x_0| \leq |x-a| + |a-x_0| < R + |a-x_0| = L,$$

故由假定知

$$|f^{(m)}(x)| \leq \sum_{n=m}^{\infty} \frac{n!}{(n-m)!} |a_n| L^{n-m} \leq \sum_{n=m}^{\infty} \frac{n!}{(n-m)!} \frac{M}{n!} L^{n-m} = M \sum_{s=0}^{\infty} \frac{L^s}{s!} = MP \quad (m=1,2,\cdots),$$

其中 $P = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{L^s}{s!} < +\infty$.

考虑余项 $R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$ 的拉格朗日形式

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \quad (0 < \theta < 1).$$

于是, 当 $|x-a| < R$ 时, 有

$$|R_n(x)| \leq \frac{MP}{(n+1)!} R^{n+1} \quad (n=1,2,\cdots).$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{R^{n+1}}{(n+1)!}$ 收敛, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, 从而, $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$. 由此可知, 当 $|x-a| < R$ 时, 展式

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

成立. 再由 $R > 0$ 的任意性即知, 此展式对一切 $x (|x| < +\infty)$ 皆成立. 证毕.

【2900】 证明: 若 (1) $a_n \geq 0$; (2) 存在 $\lim_{x \rightarrow R-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S$, 则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = S$.

证 首先, 如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ 收敛, 则根据阿贝尔定理可知, 函数 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在点 $x=R$ 处左连续. 因此,

$$\lim_{x \rightarrow R-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(R) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = S.$$

其次, 我们证明级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ 发散是不可能的. 采用反证法, 引出矛盾. 事实上, 根据 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = +\infty$ 知, 对于任取的正整数 $A > S$, 总存在正整数 N , 使有

$$\sum_{n=0}^N a_n R^n > A > S.$$

从而有

$$\lim_{x \rightarrow R-0} \sum_{n=0}^N a_n x^n = \sum_{n=0}^N a_n R^n > A > S.$$

注意到 $a_n \geq 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \geq \sum_{n=0}^N a_n x^n (x \geq 0)$, 即得

$$\lim_{x \rightarrow R-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n > A > S,$$

此与假设 $\lim_{x \rightarrow R-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S$ 相矛盾. 因此, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ 一定收敛. 从而, 命题获证.

将下列函数展开成幂级数:

【2901】 $\int_0^x e^{-t^2} dt.$

解 $\int_0^x e^{-t^2} dt = \int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!} \right] dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)} \quad (|x| < +\infty).$

【2902】 $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}.$

解 $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \int_0^x \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} t^{4n} \right] dt = x + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{4n+1}}{4n+1} \right] \quad (|x| \leq 1).$

【2903】 $\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt.$

解 $\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n+1)!} \right] dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)} \quad (|x| < +\infty).$

【2904】 $\int_0^x \frac{\arctan x}{x} dx.$

解 $\int_0^x \frac{\arctan x}{x} dx = \int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1} \right] dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2} \quad (|x| \leq 1).$

【2905】 $\int_0^x \frac{t dt}{\ln(1+t)} \quad (\text{写出四项}).$

解 令 $0 < |t| < 1$, 注意

$$\frac{1}{t} \ln(1+t) = \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n} = 1 - \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{t^m}{m+1} = 1 - \xi,$$

其中 $\xi = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{t^m}{m+1}$, 容易判断交错级数

$$\xi = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{t^m}{m+1}$$

当 $|t| < 1$ 时是收敛的, 且其和有性质 $|\xi| < 1$. 于是, 有

$$\frac{1}{\frac{1}{t} \ln(1+t)} = \frac{1}{1-\xi} = \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n.$$

因而, 当 $|x| < 1$ 时, 得

$$\int_0^x \frac{t dt}{\ln(1+t)} = \int_0^x \frac{dt}{\frac{1}{t} \ln(1+t)} = \int_0^x \frac{dt}{1-\xi} = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} \xi^n \right) dt.$$

为求四项近似, 取到 t^4 为止足够, 有

$$\xi^0 = 1, \quad \xi^1 = \frac{t}{2} - \frac{t^2}{3} + \frac{t^3}{4} - \dots, \quad \xi^2 = \frac{t^2}{4} - \frac{t^3}{3} + \dots, \quad \xi^3 = \frac{t^3}{8} - \dots,$$

于是, $\sum_{n=0}^{\infty} \xi^n = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{12} + \frac{t^3}{24} - \dots$. 从而, 当 $|x| < 1$ 时, 得原积分的前四项为

$$\int_0^x \frac{t dt}{\ln(1+t)} = \int_0^x \left(1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{12} + \frac{t^3}{24} \right) dt + O(x^5) = x + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{36} + \frac{x^4}{96} + O(x^5).$$

运用逐项微分法计算下列级数的和:

【2906】 $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots.$

解题思路 令 $F(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$. 在其收敛域 $(-1, 1)$ 内逐项微分之, 得

$$F'(x) = 1 + x^2 + x^4 + \dots = \frac{1}{1-x^2}.$$

注意 $F(0) = 0$, 即得 $F(x) = \int_0^x F'(t) dt \quad (|x| < 1).$

解 设 $F(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$. 在收敛域 $|x| < 1$ 内逐项微分之, 得

$$F'(x) = 1 + x^2 + x^4 + \dots = \frac{1}{1-x^2}.$$

注意 $F(0)=0$, 即得

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (|x| < 1).$$

于是, 当 $|x| < 1$ 时, 有 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$.

【2907】 $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$.

提示 仿 2906 题的解法.

解 设 $F(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$. 在收敛域 $|x| \leq 1$ 内逐项微分之, 得

$$F'(x) = 1 - x^2 + x^4 - \dots = \frac{1}{1+x^2}.$$

注意 $F(0)=0$, 即得

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan x.$$

于是, 当 $|x| \leq 1$ 时, 有 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan x$.

【2908】 $1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$.

提示 令 $F(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$, 将 $F(x) - F'(x)$ 与 $F(x) + F'(x)$ 相加即获解.

解 设 $F(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$. 在收敛域 $|x| < +\infty$ 内逐项微分之, 得

$$F'(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots.$$

于是, 有

$$F(x) - F'(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots = e^{-x}, \quad (1)$$

$$F(x) + F'(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = e^x. \quad (2)$$

将(1)式和(2)式相加, 最后得 $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x \quad (|x| < +\infty)$.

【2909】 $\frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^3}{3 \cdot 4} + \dots$.

解 设 $F(x) = \frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^3}{3 \cdot 4} + \dots$. 在收敛域 $|x| \leq 1$ 内逐项微分之, 得

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{4} + \dots = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots \right) \\ &= -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} [-\ln(1-x)] \quad (0 < |x| < 1). \end{aligned}$$

注意 $F(0)=0$, 即得

$$F(x) = \int_0^x F'(t) dt = 1 + \frac{1-x}{x} \ln(1-x) \quad (0 < |x| < 1).$$

当 $x=0$ 时, 级数收敛于零. 当 $x=1$ 时, 级数收敛于 1. 当 $x=-1$ 时, 级数收敛于 $1-2\ln 2$. 事实上,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots &= -\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots \\ &= 2\left(-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots\right) + 1 = 1 - 2\ln 2. \end{aligned}$$

于是,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} = \begin{cases} 1 + \frac{1-x}{x} \ln(1-x), & 0 < |x| < 1, \\ 0, & x=0, \\ 1-2\ln 2, & x=-1, \\ 1, & x=1. \end{cases}$$

【2910】 $1 + \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \dots$

解 设 $F(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \dots$. 在收敛域内逐项微分, 得

$$F'(x) = \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}2x + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}3x^2 + \dots$$

以 $1-x$ 乘上式两端, 得

$$(1-x)F'(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \dots = \frac{1}{2}F(x).$$

即 $\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{1}{2(1-x)}$. 积分得 $\ln F(x) = \ln \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ 或

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n + 1 = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \quad (|x| < 1).$$

当 $x=1$ 时, 应用拉比判别法: $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \frac{n}{2n+1} \rightarrow \frac{1}{2} < 1$, 因此, 级数是发散的.

当 $x=-1$ 时, 利用 2689 题的结果知, 级数条件收敛. 于是, $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \quad (-1 \leq x < 1)$.

运用逐项积分法计算下列级数的和:

【2911】 $x + 2x^2 + 3x^3 + \dots$

提示 令 $F(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots$, 注意 $\int_0^x F(t) dt = \frac{x}{1-x} + \ln(1-x) \quad (|x| < 1)$.

解 设 $F(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots$. 在收敛域内逐项积分之, 得

$$\begin{aligned} \int_0^x F(t) dt &= \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{4}x^4 + \dots \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(1 - \frac{1}{3}\right)x^3 + \left(1 - \frac{1}{4}\right)x^4 + \dots \\ &= (x^2 + x^3 + x^4 + \dots) - \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \dots\right) \\ &= x(1 + x + x^2 + \dots) - \left(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots\right) = \frac{x}{1-x} + \ln(1-x) \quad (|x| < 1). \end{aligned}$$

于是,

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \left[\frac{x}{1-x} + \ln(1-x) \right]' = \frac{x}{(1-x)^2} \quad (|x| < 1).$$

当 $|x|=1$ 时, 由于级数的通项不趋于零, 故它是发散的.

【2912】 $x - 4x^2 + 9x^3 - 16x^4 + \dots$

提示 令 $F(x) = x - 4x^2 + 9x^3 - 16x^4 + \dots$, 注意 $\int_0^x F(t) dt = x - \ln(1+x) - \frac{x^3}{(1+x)^2} \quad (|x| < 1)$.

解 设 $F(x) = x - 4x^2 + 9x^3 - 16x^4 + \dots$. 在收敛域内逐项积分之, 得

$$\begin{aligned} \int_0^x F(t) dt &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{9}{4}x^4 - \frac{16}{5}x^5 + \dots \\ &= \frac{1}{2}x^2 - \left(1 + \frac{1}{3}\right)x^3 + \left(2 + \frac{1}{4}\right)x^4 - \left(3 + \frac{1}{5}\right)x^5 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x + \left(-x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \cdots\right) - x^3(1 - 2x + 3x^2 - \cdots) \\
&= x - \ln(1+x) - x^3(x - x^2 + x^3 - \cdots)' \\
&= x - \ln(1+x) - x^3\left(\frac{x}{1+x}\right)' = x - \ln(1+x) - \frac{x^3}{(1+x)^2} \quad (|x| < 1).
\end{aligned}$$

于是,

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^2 x^n = \left[x - \ln(1+x) - \frac{x^3}{(1+x)^2} \right]' = \frac{x(1-x)}{(1+x)^3} \quad (|x| < 1).$$

当 $|x|=1$ 时, 级数显然发散.

【2913】 $1 \cdot 2x + 2 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 4x^3 + \cdots$.

提示 利用 2911 题的结果.

解 设 $F(x) = 1 \cdot 2x + 2 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 4x^3 + \cdots$. 在收敛域内逐项积分之, 得

$$\int_0^x F(t) dt = x^2 + 2x^3 + 3x^4 + \cdots = x(x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots) = x \cdot \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{x^2}{(1-x)^2} \quad (|x| < 1).$$

于是,

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)x^n = \left[\frac{x^2}{(1-x)^2} \right]' = \frac{2x}{(1-x)^3} \quad (|x| < 1).$$

当 $|x|=1$ 时, 级数显然发散.

*) 利用 2911 题的结果.

【2914】 证明: 级数 $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!}$ 满足方程 $y^{(4)} = y$.

证 所给级数的收敛域为 $(-\infty, +\infty)$. 在收敛域内逐项微分之, 得

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!}, \quad y'' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-2}}{(4n-2)!}, \quad y''' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{(4n-3)!}, \quad y^{(4)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-4}}{(4n-4)!}.$$

于是, $y^{(4)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!} = y$.

【2915】 证明: 级数 $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$ 满足方程 $xy'' + y' - y = 0$.

证 所给级数的收敛域为 $(-\infty, +\infty)$. 在收敛域内逐项微分之, 得

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!(n+1)!}, \quad y'' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!(n+1)!}.$$

于是,

$$xy'' + y' = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(n-1)!(n+1)!} + \frac{1}{n!(n+1)!} \right] x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2} = y,$$

从而得 $xy'' + y' - y = 0$.

求在复数域内 ($z = x + iy$) 下列幂级数的收敛半径及收敛圆:

【2916】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1-i)^n}{n \cdot 2^n}$.

解 记 $c_n = \frac{1}{n \cdot 2^n}$. 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = 2$, 故收敛半径 $R=2$; 收敛圆为 $|z-1-i| < 2$ 即

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 < 2^2.$$

【2917】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n z^n}{(n+1)(n+2)}$.

解 记 $c_n = \frac{(1+i)^n}{n(n+1)}$. 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \frac{1}{|1+i|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, 故收敛半径 $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$; 收敛圆为 $|z| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ 即

$$x^2 + y^2 < \frac{1}{2}.$$

【2918】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! z^n}{(1+i)(1+2i)\cdots(1+ni)}.$

解 记 $c_n = \frac{n!}{(1+i)(1+2i)\cdots(1+ni)}$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|1+(n+1)i|}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+(n+1)^2}}{n+1} = 1,$$

故收敛半径 $R=1$, 收敛圆为 $|z|<1$ 即 $x^2+y^2<1$.

【2919】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^{a+ib}}.$

解 记 $c_n = \frac{1}{n^{a+ib}}$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \left(\frac{n+1}{n} \right)^{a+ib} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^a = 1,$$

故收敛半径 $R=1$, 收敛圆为 $|z|<1$ 即 $x^2+y^2<1$.

【2920】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-e^{i\alpha})^n}{n(1-e^{i\alpha})^n}.$

解 记 $c_n = \frac{1}{n(1-e^{i\alpha})^n}$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{n} (1-e^{i\alpha}) \right| = |1-(\cos\alpha+i\sin\alpha)| = \sqrt{(1-\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha} = \left| 2\sin\frac{\alpha}{2} \right|,$$

故收敛半径 $R = \left| 2\sin\frac{\alpha}{2} \right|$; 收敛圆为 $|z-e^{i\alpha}| < \left| 2\sin\frac{\alpha}{2} \right|$, 即 $(x-\cos\alpha)^2 + (y-\sin\alpha)^2 < 4\sin^2\frac{\alpha}{2}$.

【2921】 利用牛顿二项式公式, 近似地计算 $\sqrt[3]{9}$, 并且估计当只取展开式的头三项时的误差.

解 $\sqrt[3]{9} = 2 \left(1 + \frac{1}{8} \right)^{\frac{1}{3}} = 2 \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} - \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8^2} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{8^3} - \cdots \right).$

当只取展开式的头三项时, 误差

$$|R_3| < 2 \cdot \frac{1}{3!} \cdot \frac{2 \cdot 5}{3^3} \cdot \frac{1}{8^3} = \frac{10}{3^4 \cdot 8^3} < 0.001.$$

计算头三项, 每一项取到小数点后四位, 即得

$$\sqrt[3]{9} \approx 2 \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} - \frac{1}{2!} \cdot \frac{2}{3^2} \cdot \frac{1}{8^2} \right) \approx 2.080.$$

【2922】 近似地计算并估计相应误差:

(1) $\arctan 1.2$; (2) $\sqrt[10]{1000}$; (3) $\frac{1}{\sqrt{e}}$; (4) $\ln 1.25$.

解 (1) 利用 $\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$, 并设 $x=1$, $\frac{x+y}{1-xy}=1.2$, 即得 $y=\frac{1}{11}$. 于是,

$$\arctan 1.2 = \arctan 1 + \arctan \frac{1}{11} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{11} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{11} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{11} \right)^5 - \cdots.$$

若取头三项, 则其误差 $|R_3| < \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{11} \right)^5 < 10^{-5}$. 计算头三项, 每一项取到小数点后六位, 即得

$$\arctan 1.2 \approx 0.87606.$$

(2) $\sqrt[10]{1000} = \sqrt[10]{1024-24} \approx 2(1-0.024)^{\frac{1}{10}} = 2 \left[1 - \frac{0.024}{10} + \frac{\frac{1}{10} \left(\frac{1}{10} - 1 \right)}{2!} (0.024)^2 - \cdots \right].$

若取头三项, 注意到上述级数的各项递减, 故其误差

$$|R_3| < 2 \cdot \frac{\frac{1}{10} \left(\frac{1}{10} - 1 \right) \left(\frac{1}{10} - 2 \right)}{3!} (0.024)^3 \cdot [1 + 0.024 + (0.024)^2 + \cdots] < 10^{-6}.$$

计算头三项, 每一项取到小数点后七位, 即得 $\sqrt[10]{1000} \approx 1.995263$.

$$(3) \frac{1}{\sqrt{e}} = e^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4!} \cdot \frac{1}{2^4} - \frac{1}{5!} \cdot \frac{1}{2^5} + \frac{1}{6!} \cdot \frac{1}{2^6} - \dots$$

若取头七项, 则其误差 $|R_7| < \frac{1}{7! \cdot 2^7} < 10^{-5}$. 计算头七项, 每一项取到小数点后六位, 即得 $\frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0.60653$.

$$(4) \ln 1.25 = \ln\left(1 + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2 \cdot 4^2} + \frac{1}{3 \cdot 4^3} - \frac{1}{4 \cdot 4^4} + \frac{1}{5 \cdot 4^5} - \frac{1}{6 \cdot 4^6} + \dots$$

若取头六项, 则其误差 $|R_6| < \frac{1}{7 \cdot 4^7} < 10^{-5}$. 计算头六项, 每一项取到小数点后六位, 即得 $\ln 1.25 \approx 0.22314$.

*) 本题并未注明取多少项以估计误差, 因此, 我们可任意选取. 各小题均类似处理.

利用适当的展开式, 计算下列函数精确到所指出的程度的值.

【2923】 $\sin 18^\circ$, 精确到 10^{-5} .

解 $\sin 18^\circ = \sin \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{10} - \frac{\pi^3}{3!10^3} + \frac{\pi^5}{5!10^5} - \dots$ 上述级数为交错级数, 若取头 n 项, 则其误差

$$\Delta < \frac{1}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi}{10}\right)^{2n+1}.$$

要使 $\Delta < 10^{-5}$, 只要 $\frac{1}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi}{10}\right)^{2n+1} < 10^{-5}$, 以 $n=3$ 代入上式即满足 ($n=2$ 达不到要求的精确程度). 计算头三项, 每一项取到小数点后六位, 即得 $\sin 18^\circ \approx 0.30902$.

【2924】 $\cos 1^\circ$, 精确到 10^{-6} .

$$\text{解 } \cos 1^\circ = \cos \frac{\pi}{180} = 1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{\pi}{180}\right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{\pi}{180}\right)^4 - \dots$$

取 $n=2$, 即可保证 $\Delta < \frac{1}{4!} \left(\frac{\pi}{180}\right)^4 < 10^{-6}$. 计算得 $\cos 1^\circ \approx 0.999848$.

【2925】 $\tan 9^\circ$, 精确到 10^{-3} .

$$\text{解 } \tan 9^\circ = \tan \frac{\pi}{20} = \frac{\pi}{20} + \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{20}\right)^3 + \frac{2}{15} \left(\frac{\pi}{20}\right)^5 + \dots$$

若取头二项, 考虑到上述级数的各项递减, 则其误差

$$\Delta < \frac{2}{15} \left(\frac{\pi}{20}\right)^5 \left[1 + \left(\frac{\pi}{20}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{20}\right)^4 + \dots\right] < 10^{-3}.$$

取两项计算, 每一项取到小数点后四位, 计算得 $\tan 9^\circ \approx 0.158$.

*) 利用 2891 题的结果.

【2926】 e , 精确到 10^{-6} .

解 $e = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!}$. 若取 $1 + \sum_{m=1}^n \frac{1}{m!}$ 作为 e 的近似值, 则其误差

$$\Delta = \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m!} = \frac{1}{n!} \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \cdots m} < \frac{1}{n!} \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{m-n}} = \frac{1}{n!n}.$$

要 $\Delta < 10^{-6}$, 只要 $\frac{1}{n!n} < 10^{-6}$, 也即只要 $n!n > 10^6$. 取 $n=9$ 即可. 于是, 当每项取到小数点后七位, 即得

$$e \approx 1 + \sum_{n=1}^9 \frac{1}{n!} \approx 2.718282.$$

【2927】 $\ln 1.2$, 精确到 10^{-4} .

$$\text{解 } \ln 1.2 = \ln(1 + 0.2) = 0.2 - \frac{1}{2} (0.2)^2 + \frac{1}{3} (0.2)^3 - \frac{1}{4} (0.2)^4 + \dots$$

若取头 n 项, 则其误差 $\Delta < \frac{1}{n+1} (0.2)^{n+1}$. 要 $\Delta < 10^{-4}$, 只要 $\frac{1}{n+1} (0.2)^{n+1} < 10^{-4}$. 取 $n=4$ 即可保证 $\Delta < \frac{1}{5} (0.2)^5 < 10^{-4}$. 于是, 当每项取到小数点后五位, 即得

$$\ln 1.2 \approx 0.2 - \frac{1}{2} (0.2)^2 + \frac{1}{3} (0.2)^3 - \frac{1}{4} (0.2)^4 \approx 0.1823.$$

【2928】 由等式 $\frac{\pi}{6} = \arcsin \frac{1}{2}$ 求数 π , 精确到 10^{-4} .

解 $\pi = 6 \arcsin \frac{1}{2}$

$$= 6 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2} \right)^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7} \left(\frac{1}{2} \right)^7 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{1}{9} \left(\frac{1}{2} \right)^9 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} \cdot \frac{1}{11} \left(\frac{1}{2} \right)^{11} + \dots \right].$$

若取头六项, 考虑到上述级数的各项递减, 则其误差

$$\Delta < 6 \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12} \cdot \frac{1}{13} \left(\frac{1}{2} \right)^{13} \left[1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \right)^4 + \dots \right] < 10^{-4}.$$

取头六项计算, 每一项取到小数点后五位, 即得 $\pi \approx 3.1416$.

【2929】 利用等式 $\frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$ 计算数 π , 精确到 0.001.

解 按题设, 有

$$\frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2^5} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{2^7} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2^9} - \dots \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^5} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3^7} + \dots \right).$$

注意到等式右端的两个级数都是莱布尼茨型的, 故在被加数与加数中, 弃去未写出项的校正数分别为

$$0 < \Delta_1 < \frac{4}{11 \cdot 2^{11}} < 0.0002, \quad 0 < \Delta_2 < \frac{4}{9 \cdot 3^9} < 0.00002,$$

于是, 总误差 $\Delta \leq \Delta_1 + \Delta_2 < 0.001$. 计算保留下来的项近似到小数点后四位(末位由四舍五入而得), 即可保证达到所需误差, 列成下表(括号中的正、负号指示校正数的符号):

正 项	负 项
$\frac{4}{2} = 2.0000$	$\frac{4}{3 \cdot 2^3} = 0.1667(-)$
$\frac{4}{5 \cdot 2^5} = 0.0250$	$\frac{4}{7 \cdot 2^7} = 0.0045(-)$
$\frac{4}{9 \cdot 2^9} = 0.0009(-)$	$\frac{4}{3 \cdot 3^3} = 0.0494(-)$
$\frac{4}{3} = 1.3333(+)$	$+) \frac{4}{7 \cdot 3^7} = 0.0003(-)$
$+) \frac{4}{5 \cdot 3^5} = 0.0033(-)$	<hr style="width: 100%;"/>
<hr style="width: 100%;"/>	<div style="text-align: right;">0.2209</div>
<div style="text-align: right;">3.3625</div>	
<div style="text-align: right;">-) 0.2209</div>	
<hr style="width: 100%;"/>	
<div style="text-align: right;">3.1416</div>	

于是, $3.1415 < \pi < 3.1420$. 因此, 取 $\pi \approx 3.142$ 即可精确到 0.001.

【2930】 利用等式

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$$

求数 π , 精确到 10^{-9} .

解 在此, 我们证明一下 2929 题及本题中的等式. 如果注意到反正切函数的加法公式

$$\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy} \quad (|x+y| < \frac{\pi}{2}),$$

并选取任何两个满足关系式 $\frac{x+y}{1-xy} = 1$ 或 $(1+x)(1+y) = 2$ 的真分数作为 x, y , 就有

$$\frac{\pi}{4} = \arctan x + \arctan y.$$

例如,令 $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{3}$, 即得 $\frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$. 这就是 2929 题中所出现的等式.

如果令 $x = \frac{1}{5}$, $\arctan \frac{1}{5} = \alpha$, 则

$$\tan \alpha = \frac{1}{5}, \quad \tan 2\alpha = \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{5}{12}, \quad \tan 4\alpha = \frac{\frac{10}{12}}{1 - \frac{25}{144}} = \frac{120}{119} \approx 1.$$

可见, $4\alpha \approx \frac{\pi}{4}$.

令 $\beta = 4\alpha - \frac{\pi}{4}$, 则 $\tan \beta = \frac{\frac{120}{119} - 1}{1 + \frac{120}{119}} = \frac{1}{239}$. 于是, $\beta = \arctan \frac{1}{239}$. 由此, 得

$$\frac{\pi}{4} = 4\alpha - \beta = 4\arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$$

或

$$\begin{aligned} \pi &= 16\arctan \frac{1}{5} - 4\arctan \frac{1}{239} \\ &= 16 \left\{ \frac{1}{5} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{5^7} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{5^9} - \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{5^{11}} + \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{5^{13}} - \cdots \right\} - 4 \left\{ \frac{1}{239} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{239^3} + \cdots \right\}. \end{aligned}$$

这就是本题中所出现的等式, 它就是著名的马信(J. Machin)公式.

我们要依靠此式计算 π , 精确到 10^{-9} , 只要上面已写出的那些项就够了. 事实上, 这两个级数都是莱布尼茨型的, 所以在被减数与减数中, 弃去了未写出的项的校正数分别为

$$0 < \Delta_1 < \frac{16}{15 \cdot 5^{15}} < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^9} \quad \text{与} \quad 0 < \Delta_2 < \frac{4}{5 \cdot 239^5} < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^9},$$

于是, 总误差 $\Delta \leq \Delta_1 + \Delta_2 < \frac{1}{10^9}$. 计算保留下来的项近似到小数点后十位, 列成下表(括号中的士号指示校正数的符号):

$$\begin{aligned} \frac{16}{5} &= 3.2000000000 \\ \frac{16}{5 \cdot 5^3} &= 0.0010240000 \\ \frac{16}{9 \cdot 5^9} &= 0.0000009102(+) \\ +) \frac{16}{13 \cdot 5^{13}} &= 0.0000000010(+) \\ \hline &3.2010249112 \\ -) 0.0426959536 \\ \hline &3.1583289576 \\ \frac{16}{3 \cdot 5^3} &= 0.0426666667(-) \\ \frac{16}{7 \cdot 5^7} &= 0.0000292571(+) \\ +) \frac{16}{11 \cdot 5^{11}} &= 0.0000000298(-) \\ \hline &0.0426959536 \\ \frac{4}{239} &= 0.0167364017(-) \\ -) \frac{4}{3 \cdot 239^3} &= 0.0000000977(+) \\ \hline &0.0167363040 \end{aligned}$$

于是,

$$3.1583289576 < 16\alpha < 3.1583289577, \quad -0.0167363040 = -4\beta = -0.0167363040;$$

$$\pi = 16\alpha - 4\beta, \quad 3.1415926536 < \pi < 3.1415926537.$$

因此,取 $\pi \approx 3.141592654$ 可精确到 10^{-9} , 并且可知:如取 $\pi \approx 3.141592653 \dots$ 所有写出的数字都是正确的.

【2931】 利用公式 $\ln(n+1) = \ln n + 2 \left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \dots \right]$ 求 $\ln 2$ 和 $\ln 3$, 精确到 10^{-5} .

解 当 $n=1$ 时, $\ln 2 = 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \frac{1}{9 \cdot 3^9} + \dots \right)$.

如取已写出的那些项计算 $\ln 2$, 即知

$$0 < \Delta < 2 \left(\frac{1}{11} \cdot \frac{1}{3^{11}} + \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{3^{13}} + \dots \right) < \frac{2}{11 \cdot 3^{11}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3^2}} < \frac{2}{10^6}.$$

计算到小数点后六位, 并作出下表:

$$\begin{array}{r} \frac{2}{3} = 0.666667(-) \\ \frac{2}{3 \cdot 3^3} = 0.024691(+) \\ \frac{2}{5 \cdot 3^5} = 0.001646(+) \\ \frac{2}{7 \cdot 3^7} = 0.000131(-) \\ +) \frac{2}{9 \cdot 3^9} = 0.000011(+) \\ \hline 0.693146 \end{array}$$

故 $0.693146 < \ln 2 < 0.693148$.

于是, $\ln 2 = 0.69314 \dots$, 并且所有写出来的五位数字都是正确的. 如果, 将第六位四舍五入, 即得 $\ln 2 \approx 0.69315$, 精确到 10^{-5} .

令 $n=2$, 即得

$$\ln 3 = \ln 2 + 2 \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} + \frac{1}{7 \cdot 5^7} + \frac{1}{9 \cdot 5^9} \right) + \dots, \quad (1)$$

与 $\ln 2$ 一样, 取写出的诸项, 计算到小数点后六位, 并作出下表:

$$\begin{array}{r} \frac{2}{5} = 0.400000 \\ \frac{2}{3 \cdot 5^3} = 0.005333(+) \\ \frac{2}{5 \cdot 5^5} = 0.000128 \\ \frac{2}{7 \cdot 5^7} = 0.000004(-) \\ +) \frac{2}{9 \cdot 5^9} = 0.000000(+) \\ \hline 0.405465 \end{array}$$

于是, (1) 式右端的级数的和为 $0.40546 \dots$, 并且写出来的五位数字都是正确的. 如将第六位四舍五入, 可得 0.40547 .

最后, 由 (1) 式得

$$\ln 3 \approx 0.693146 \dots + 0.405465 \dots = 1.09861 \dots,$$

并且所有写出来的数字都是正确的.

如果将第六位四舍五入, 即得 $\ln 3 \approx 0.69315 + 0.40546 = 1.09861$, 它精确到 10^{-5} .

【2932】 将被积函数展开成级数, 从而计算下列积分之值, 精确到 0.001 :

$$(1) \int_0^1 e^{-x^2} dx; \quad (2) \int_2^4 e^{\frac{1}{x}} dx; \quad (3) \int_0^2 \frac{\sin x}{x} dx;$$

$$(4) \int_0^1 \cos x^2 dx;$$

$$(5) \int_0^1 \frac{\operatorname{sh} x}{x} dx;$$

$$(6) \int_2^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3};$$

$$(7) \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}};$$

$$(8) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}};$$

$$(9) \int_{10}^{100} \frac{\ln(1+x)}{x} dx;$$

$$(10) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arctan x}{x} dx;$$

$$(11) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin x}{x} dx;$$

$$(12) \int_0^1 x^x dx.$$

解 (1) $\int_0^1 e^{-x^2} dx = \int_0^1 \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \dots \right) dx$
 $= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5 \cdot 2!} - \frac{1}{7 \cdot 3!} + \frac{1}{9 \cdot 4!} - \dots,$

如取写出来的诸项, 计算到小数点后四位, 并作出下表:

$$\begin{array}{r} 1 = 1.0000 \\ \frac{1}{5 \cdot 2!} = 0.1000 \\ +) \frac{1}{9 \cdot 4!} = 0.0046(+) \\ \hline 1.1046 \\ -) 0.3571 \\ \hline 0.7475 \\ \frac{1}{3} = 0.3333(+) \\ +) \frac{1}{7 \cdot 3!} = 0.0238(+) \\ \hline 0.3571 \end{array}$$

于是, $0.7473 < \int_0^1 e^{-x^2} dx < 0.7476$, 即有 $\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx 0.747$, 精确到 0.001, 并且所有写出来的数字都是正确的.

$$\begin{aligned} (2) \int_2^4 e^{\frac{1}{x}} dx &= \int_2^4 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2!x^2} + \frac{1}{3!x^3} + \frac{1}{4!x^4} + \dots \right) dx = 2 + \ln 2 + \frac{1}{2! \cdot 4} + \frac{3}{3! \cdot 32} + \frac{7}{4! \cdot 192} + \dots \\ &= 2 + 0.6931 + 0.1250 + 0.0156 + 0.0015 + \dots \approx 2.8352 \quad (0 < \Delta < 0.001). \end{aligned}$$

于是, $\int_2^4 e^{\frac{1}{x}} dx \approx 2.835$, 精确到 0.001.

$$(3) \int_0^2 \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^2 \frac{1}{x} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right) dx = 2 - \frac{2^3}{3 \cdot 3!} + \frac{2^5}{5 \cdot 5!} - \frac{2^7}{7 \cdot 7!} + \dots,$$

如取写出来的诸项计算积分值, 则其误差 $0 < \Delta < \frac{2^9}{9 \cdot 9!} < \frac{1}{10^3}$. 列下表:

$$\begin{array}{r} 2 = 2.0000 \\ +) \frac{2^5}{5 \cdot 5!} = 0.0533(+) \\ \hline 2.0533 \\ -) 0.4480 \\ \hline 1.6053 \\ \frac{2^3}{3 \cdot 3!} = 0.4444(+) \\ +) \frac{2^7}{7 \cdot 7!} = 0.0036(+) \\ \hline 0.4480 \end{array}$$

于是, $1.6051 < \int_0^2 \frac{\sin x}{x} dx < 1.6054$, 即 $\int_0^2 \frac{\sin x}{x} dx \approx 1.605$, 并且所有写出的数字都是正确的.

$$(4) \int_0^1 \cos x^2 dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!} - \dots \right) dx = 1 - \frac{1}{5 \cdot 2!} + \frac{1}{9 \cdot 4!} - \dots,$$

如取写出的诸项计算积分值, 则其误差 $0 < \Delta < \frac{1}{13 \cdot 6!} < \frac{1}{10^3}$. 列下表:

$$\begin{array}{r}
 1 = 1.0000 \\
 +) \frac{1}{9 \cdot 4!} = 0.0046 (+) \\
 \hline
 1.0046 \\
 -) 0.1000 \\
 \hline
 0.9046 \\
 \frac{1}{5 \cdot 2!} = 0.1000
 \end{array}$$

所以, $\int_0^1 \cos x^2 dx \approx 0.9046$. 于是, $\int_0^1 \cos x^2 dx \approx 0.905$, 精确到 0.001.

$$(5) \int_0^1 \frac{\operatorname{sh} x}{x} dx = \int_0^1 \frac{1}{x} \left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \right) dx = 1 + \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!} + \dots,$$

如取写出来的诸项计算积分值, 则其误差

$$0 < \Delta < \frac{1}{7 \cdot 7!} \left(1 + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^4} + \dots \right) = \frac{1}{7 \cdot 7!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{7^2}} < 10^{-3}.$$

列下表:

$$\begin{array}{r}
 1 = 1.0000 \\
 \frac{1}{3 \cdot 3!} = 0.0556 (-) \\
 +) \frac{1}{5 \cdot 5!} = 0.0017 (+) \\
 \hline
 1.0573
 \end{array}$$

于是, $\int_0^1 \frac{\operatorname{sh} x}{x} dx \approx 1.057$, 精确到 0.001.

(6) 当 $x \geq 2$ 时,

$$\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{x^3} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^3} = \left(\frac{1}{x}\right)^3 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{x}\right)^{3n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{x}\right)^{3n+3},$$

于是,

$$\begin{aligned}
 I &= \int_2^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_2^{+\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{3n+3} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+2} \left(\frac{1}{2}\right)^{3n+2} \\
 &= \frac{1}{8} - \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2}\right)^8 - \frac{1}{11} \left(\frac{1}{2}\right)^{11} + \dots
 \end{aligned}$$

取前两项的近似值就有 $I = 0.119 + \theta$ ($0 < \theta < 0.001$). 或者用直接积分法:

$$\begin{aligned}
 \int_2^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3} &= \int_2^{+\infty} \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+x} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x-2}{x^2-x+1} \right) dx \\
 &= \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \Big|_2^{+\infty} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{6} \ln 3 - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\pi}{6} - \frac{1}{6} \ln 3 \approx 0.119,
 \end{aligned}$$

精确到 0.001.

$$(7) \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{3}} = 1 + \frac{x^2}{3} + \frac{4x^4}{3^2 \cdot 2!} + \dots,$$

故得 $\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^3} + \dots \approx 0.337$, 精确到 0.001.

$$\begin{aligned}
 (8) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} &= \int_0^1 (1+x^4)^{-\frac{1}{2}} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!}x^8 + \dots \right) dx \\
 &= 1 - \frac{1}{5 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 3}{9 \cdot 2^2 \cdot 2!} - \dots - \frac{1 \cdot 3 \cdots 45}{93 \cdot 2^{23} \cdot 23!} + \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1.0000 + 0.0417 + 0.0160 + 0.0090 + 0.0060 + 0.0043 + 0.0033 + 0.0026 + 0.0022 + 0.0018 + \\
&\quad 0.0014 + 0.0012) - (0.1000 + 0.0240 + 0.0117 + 0.0072 + 0.0050 + 0.0037 + 0.0029 + 0.0024 + \\
&\quad 0.0020 + 0.0016 + 0.0013 + 0.0010) + \cdots \\
&\approx 0.927.
\end{aligned}$$

$$0 < \Delta < \frac{1 \cdot 3 \cdots 47}{97 \cdot 2^{24} \cdot 24!} < 10^{-5}.$$

(9) 注意, 当 $10 \leq x \leq 100$ 时, 有

$$\ln(1+x) = \ln\left[x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] = \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{1}{x}\right)^n,$$

于是, 得

$$\begin{aligned}
I &= \int_{10}^{100} \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \int_{10}^{100} \frac{\ln x}{x} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \int_{10}^{100} x^{-n-1} dx \\
&= \frac{3}{2} \ln^2 10 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cdot \frac{1}{10^n} \left(1 - \frac{1}{10^n}\right) \\
&= \frac{3}{2} \ln^2 10 + \frac{1}{10} \left(1 - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{4 \cdot 10^2} \left(1 - \frac{1}{10^2}\right) + \frac{1}{9 \cdot 10^3} \left(1 - \frac{1}{10^3}\right) + \cdots \\
&\approx 8.041 \quad (\text{精确到 } 0.001).
\end{aligned}$$

$$(10) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arctan x}{x} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x} \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots\right) dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{3^2 \cdot 2^3} + \frac{1}{5^2 \cdot 2^5} - \frac{1}{7^2 \cdot 2^7} + \cdots,$$

如取前三项计算积分值, 则其误差 $0 < \Delta < \frac{1}{7^2 \cdot 2^7} < \frac{1}{10^3}$. 于是, $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arctan x}{x} dx \approx 0.488$ (精确到 0.001).

$$(11) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin x}{x} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x} \left(x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots\right) dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^4 \cdot 3^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5^2 \cdot 2^5} + \cdots,$$

如取前三项计算积分值, 则其误差

$$0 < \Delta < \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7^2} \cdot \frac{1}{2^7} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \cdots\right) < \frac{1}{7^2 \cdot 2^7} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2^2}} < \frac{1}{10^3}.$$

于是, $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin x}{x} dx \approx 0.507$ (精确到 0.001).

(12) 注意到

$$x^x = e^{x \ln x} = 1 + x \ln x + \frac{(x \ln x)^2}{2!} + \cdots + \frac{(x \ln x)^n}{n!} + \cdots,$$

并有 $\int_0^1 x^n \ln^n x dx = (-1)^n \frac{n!}{(n+1)^{n+1}}$. 于是,

$$\int_0^1 x^x dx = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{27} - \frac{1}{256} + \cdots,$$

如取前四项计算积分值, 则其误差

$$0 < \Delta < \frac{4!}{4! \cdot (4+1)^{4+1}} = \frac{1}{5^5} < \frac{1}{10^3},$$

故 $\int_0^1 x^x dx \approx 0.783$ (精确到 0.001).

*) 参看 2286 题, $m=n$.

【2933】 求一段正弦曲线 $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) 之弧长, 并精确到 0.01.

解 弧长 s 为

$$s = \int_0^{\pi} \sqrt{1+y'^2} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos^2 x} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{1}{2} \cos^2 x - \frac{1}{2! \cdot 2^2} \cos^4 x + \frac{1 \cdot 3}{3! \cdot 2^3} \cos^6 x - \cdots\right) dx.$$

注意到 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x dx = \frac{\pi(2n)!}{2^{2n+1} \cdot n! \cdot n!}$, 即有

$$s = 2 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi \cdot 2!}{2^4} - \frac{1}{2!2^2} \cdot \frac{\pi \cdot 4!}{2^5 \cdot 2!2!} + \frac{1 \cdot 3}{3!2^3} \cdot \frac{\pi \cdot 6!}{2^7 \cdot 3!3!} - \dots \right) = \pi \left(1 + \frac{1}{4} - \frac{3}{64} + \frac{5}{256} - \dots \right),$$

如取写出的诸项计算 s 值, 则其误差

$$0 < \Delta < \frac{3 \cdot 5 \cdot 2\pi}{4!2^4} \cdot \frac{8!}{2^5 \cdot 4!4!} < \frac{1}{10^2}.$$

于是, $s \approx 3.14(1 + 0.25 - 0.05 + 0.02) \approx 3.83$.

*) 利用 2290 题的结果, $m=0$.

【2934】 椭圆之半轴为 $a=1$ 及 $b=\frac{1}{2}$, 求椭圆的弧长, 并精确到 0.01.

解 椭圆的参数方程为 $x=asint$, $y=bcost$. 于是,

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2} dt = \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt = a \cdot \sqrt{1 - \epsilon^2 \sin^2 t} dt,$$

其中 $\epsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ 为椭圆的离心率, 从而得

$$\begin{aligned} s &= 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \epsilon^2 \sin^2 t} dt \\ &= 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1}{2} \epsilon^2 \sin^2 t - \frac{1}{2!2^2} \epsilon^4 \sin^4 t - \frac{1 \cdot 3}{3! \cdot 2^3} \epsilon^6 \sin^6 t - \dots \right) dt \\ &= 4a \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \epsilon^2 \cdot \frac{\pi \cdot 2!}{2^3} - \frac{1}{2!2^2} \epsilon^4 \cdot \frac{\pi \cdot 4!}{2^5 \cdot 2!2!} - \frac{1 \cdot 3}{3!2^3} \epsilon^6 \cdot \frac{\pi \cdot 6!}{2^7 \cdot 3!3!} - \dots \right) \end{aligned}$$

如取写出的前五项计算 s 值, 则其误差 $0 < \Delta < 10^{-2}$. 再以 a, b 值代入, 即得

$$\begin{aligned} s &= 2\pi \left(1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} - \frac{3}{64} \cdot \frac{9}{16} - \frac{5}{256} \cdot \frac{27}{64} - \frac{5 \cdot 27 \cdot 3}{256 \cdot 64 \cdot 4} - \dots \right) \\ &\approx 2\pi(1 - 0.188 - 0.026 - 0.008 - 0.003 - \dots) \approx 4.84. \end{aligned}$$

【2935】 两根电线杆相距 $2l=20\text{m}$, 电线成抛物线的形状. 若电线下垂高度 $h=40\text{cm}$, 计算电线的长度, 并精确到 1cm.

解 先建立抛物线 AOB 的方程.

取坐标系如图 5.2 所示, 则方程的标准形式为 $x^2 = 2py$.

由于此抛物线过点 $B(10, 0.4)$, 所以,

$$10^2 = 2p(0.4), \quad p = 125,$$

即 $y = \frac{1}{250}x^2$. 于是, 所求的电线长为

$$\begin{aligned} s &= 2 \int_0^{10} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{125}x\right)^2} dx \\ &= 250 \int_0^{\frac{2}{25}} \sqrt{1 + t^2} dt = 250 \int_0^{\frac{2}{25}} (1 + t^2)^{\frac{1}{2}} dt \\ &= 250 \int_0^{\frac{2}{25}} \left(1 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2!2^2}t^4 + \frac{1 \cdot 3}{3!2^3}t^6 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{4!2^4}t^8 + \dots \right) dt \\ &= 250 \left(\frac{2}{25} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2^3}{25^3} - \frac{1}{5 \cdot 2!2^2} \cdot \frac{2^5}{25^5} + \dots \right), \end{aligned}$$

如取前两项计算积分值, 则其误差 $0 < \Delta < \frac{250}{5 \cdot 2! \cdot 2^2} \cdot \frac{2^5}{25^5} < 10^{-2}$. 因此,

$$s \approx 250 \left(\frac{2}{25} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2^3}{25^3} \right) \approx 20 + 0.02 = 20.02\text{m},$$

即所求的电线长为 20.02m, 精确到 0.01m.

注 严格地说, 若不计电线的伸长, 电线的形状应为悬链线.

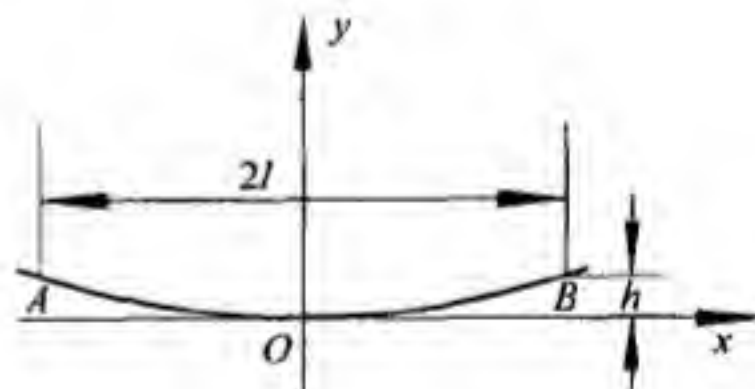


图 5.2

§ 6. 傅里叶级数

1° 展开定理 若函数 $f(x)$ 在区间 $(-l, l)$ 内分段连续并有分段连续的导数 $f'(x)$, 并且一切不连续点 ξ 是正则的 [即 $f(\xi) = \frac{1}{2}[f(\xi-0) + f(\xi+0)]$], 则函数 $f(x)$ 在此区间上可用傅里叶级数表示:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right), \quad (1)$$

式中

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n=0, 1, 2, \dots), \quad (2)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n=1, 2, \dots). \quad (2')$$

特别是:

(i) 若函数 $f(x)$ 是偶函数, 则有:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad (3)$$

式中 $a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n=0, 1, 2, \dots);$

(ii) 若函数 $f(x)$ 是奇函数, 则有:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (4)$$

式中 $b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n=1, 2, \dots).$

一个在区间 $(0, l)$ 中有定义的并且具有上述连续性的函数 $f(x)$, 可在该区间内用公式(3)及公式(4)表示.

2° 完全性条件 对于任何在区间 $(-l, l)$ 上可积的且其平方也可积的函数 $f(x)$, 组成具有系数(2), (2')的级数(1), 则李雅普诺夫等式成立:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f^2(x) dx.$$

3° 傅里叶级数的积分法 在区间 $(-l, l)$ 内按黎曼意义可积的函数 $f(x)$ 之傅里叶级数(1) (即使是发散的), 可以在此区间内逐项积分.

【2936】 将函数 $f(x) = \sin^4 x$ 展开成傅里叶级数.

解 在 $[-\pi, \pi]$ 上, 函数 $f(x) = \sin^4 x$ 展开成傅里叶级数, 有

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

由于

$$\sin^4 x = \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \cdot \frac{1 + \cos 4x}{2} = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x,$$

故有

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^4 x dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x \right) dx = \frac{3}{4}, \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^4 x \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{3}{8} \cos nx - \frac{1}{2} \cos 2x \cos nx + \frac{1}{8} \cos 4x \cos nx \right) dx \\ &= \begin{cases} 0, & n \neq 2, n \neq 4, \\ -\frac{1}{2}, & n=2, \\ \frac{1}{8}, & n=4; \end{cases} \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^4 x \sin nx dx = 0 \quad (n=1, 2, \dots).$$

又函数 $f(x)$ 处处连续, 故其傅里叶级数收敛于函数本身, 即 $f(x) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x$.

注 由此题可以看出, 周期为 2π 的三角多项式的傅里叶级数就是它本身, 下面一题将给出一般的证明.

【2937】 三角多项式 $p_n(x) = \sum_{i=0}^n (a_i \cos ix + \beta_i \sin ix)$ 的傅里叶级数是怎样的?

解 $p_n(x)$ 是以 2π 为周期的函数, 不妨在 $[-\pi, \pi]$ 上展开成傅里叶级数. 由于

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p_n(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{i=0}^n (a_i \cos ix + \beta_i \sin ix) dx = 2a_0,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p_n(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{i=0}^n (a_i \cos ix + \beta_i \sin ix) \cos nx dx = a_n;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p_n(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{i=0}^n (a_i \cos ix + \beta_i \sin ix) \sin nx dx = \beta_n.$$

于是, 在 $[-\pi, \pi]$ 上, 有

$$p_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \sum_{i=0}^n (a_i \cos ix + \beta_i \sin ix),$$

即 $p_n(x)$ 的傅里叶级数就是它本身.

【2938】 将函数 $f(x) = \operatorname{sgn} x$ ($-\pi < x < \pi$) 展开为傅里叶级数.

绘出函数的图像及此函数之傅里叶级数之若干部分和的图像.

利用该展开式, 求莱布尼茨级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ 的和.

解 由于

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sgn} x dx = 0, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sgn} x \cos nx dx = 0;$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sgn} x \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sgn} x \sin nx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx = -\frac{2}{n\pi} \cos nx \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{n\pi} [1 - (-1)^n], \end{aligned}$$

又函数 $f(x)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 上只有一个第一类不连续点, 故其傅里叶级数收敛, 且有

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

$f(x)$ 及其傅里叶级数之若干部分和的图像如图 5.3 所示, 其中画的一项是 S_1 、两项之和 S_2 及 $f(x)$ 的图像.

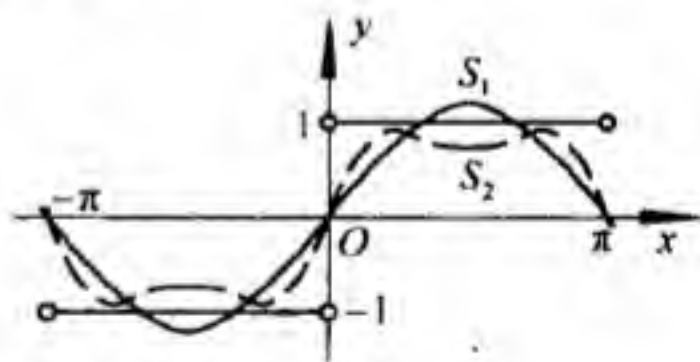


图 5.3

若令 $x = \frac{\pi}{2}$, 则得 $\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = 1$, 即莱布尼茨级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}.$$

在所指定的区间内把下列函数展开为傅里叶级数:

【2939】 在区间 $(0, 2l)$ 内展开 $f(x) = \begin{cases} A, & 0 < x < l, \\ 0, & l < x < 2l, \end{cases}$ 其中 A 为常数.

解 由于

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(x) dx = \frac{1}{l} \int_0^l A dx = A,$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{l} \int_0^l A \cos \frac{n\pi x}{l} dx = 0;$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{l} \int_0^l A \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{A}{n\pi} [1 - (-1)^n],$$

故按展开定理, $f(x)$ 可展开为

$$\frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin(2k+1) \frac{\pi x}{l} = \begin{cases} A, & 0 < x < l \\ \frac{A}{2}, & x = l, \\ 0, & l < x < 2l. \end{cases}$$

【2940】 在区间 $(-\pi, \pi)$ 内展开 $f(x) = x$.

解 因为 $f(x) = x$ 为奇函数, 从而, $a_0 = a_n = 0$, 且

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx = (-1)^{n-1} \frac{2}{n},$$

故按展开定理, $f(x)$ 可展开为 $2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n} = x \quad (-\pi < x < \pi)$.

【2941】 在区间 $(0, 2\pi)$ 内展开 $f(x) = \frac{\pi-x}{2}$.

解 由于

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi-x}{2} dx = \frac{1}{2\pi} \left(\pi x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi-x}{2} \cos nx dx = \frac{\pi-x}{2n\pi} \sin nx \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2n\pi} \int_0^{2\pi} \sin nx dx = 0;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi-x}{2} \sin nx dx = -\frac{\pi-x}{2n\pi} \cos nx \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2n\pi} \int_0^{2\pi} \cos nx dx = \frac{1}{n},$$

故按展开定理, $f(x)$ 可展开为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi-x}{2} \quad (0 < x < 2\pi)$.

【2942】 在区间 $(-\pi, \pi)$ 内展开 $f(x) = |x|$.

解 因为 $f(x) = |x|$ 为偶函数, 从而, $b_n = 0$, 且

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\pi} = \pi,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{n\pi} x \sin nx \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx = \frac{2}{n^2\pi} [(-1)^n - 1],$$

故按展开定理, $f(x)$ 可展开为 $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} = |x| \quad (-\pi < x < \pi)$.

【2943】 在区间 $(-\pi, \pi)$ 内展开 $f(x) = \begin{cases} ax, & -\pi < x < 0, \\ bx, & 0 < x < \pi, \end{cases}$ 其中 a 和 b 为常数.

解 由于

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 ax dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} bx dx = \frac{b-a}{2} \pi,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 ax \cos nx dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} bx \cos nx dx = \frac{a-b}{n^2\pi} [1 - (-1)^n];$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 ax \sin nx dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} bx \sin nx dx = \frac{a+b}{n} (-1)^{n+1},$$

故按展开定理, $f(x)$ 可展开为

$$\frac{b-a}{4} \pi + \frac{2(a-b)}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} + (a+b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx = \begin{cases} ax, & -\pi < x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ bx, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

【2944】 在区间 $(-\pi, \pi)$ 内展开 $f(x) = \pi^2 - x^2$.

解 因为 $f(x) = \pi^2 - x^2$ 为偶函数, 从而, $b_n = 0$, 且

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi^2 - x^2) dx = \frac{2}{\pi} \left(\pi^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{4\pi^2}{3},$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi^2 - x^2) \cos nx dx = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = -\frac{2}{n\pi} x^2 \sin nx \Big|_0^{\pi} + \frac{4}{n\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx \\ &= -\frac{4}{n^2\pi} x \cos nx \Big|_0^{\pi} + \frac{4}{n^2\pi} \int_0^{\pi} \cos nx dx = \frac{4}{n^2} (-1)^{n+1}, \end{aligned}$$

故按展开定理, $f(x)$ 可展开为 $\frac{2\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos nx = \pi^2 - x^2 \quad (-\pi < x < \pi)$.

【2945】 在区间 $(-\pi, \pi)$ 内展开 $f(x) = \cos ax$ (a 不是整数).

解 因为 $f(x) = \cos ax$ 为偶函数, 从而, $b_n = 0$, 且

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos ax dx = \frac{2}{a\pi} \sin a\pi, \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos ax \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\cos(n+a)x + \cos(n-a)x] dx = \frac{2 \sin a\pi}{\pi} \frac{(-1)^{n+1} a}{n^2 - a^2}, \end{aligned}$$

故按展开定理, $f(x)$ 可展开为 $\frac{2 \sin a\pi}{\pi} \left[\frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{a \cos nx}{n^2 - a^2} \right] = \cos ax \quad (-\pi < x < \pi)$.

【2946】 在区间 $(-\pi, \pi)$ 内展开 $f(x) = \sin ax$ (a 不是整数).

解 因为 $f(x) = \sin ax$ 为奇函数, 从而, $a_0 = a_n = 0$, 且

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin ax \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\cos(n-a)x - \cos(n+a)x] dx = \frac{2 \sin a\pi}{\pi} \frac{(-1)^{n+1} n}{n^2 - a^2},$$

故按展开定理, $f(x)$ 可展开为 $\frac{2 \sin a\pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n \sin nx}{n^2 - a^2} = \sin ax \quad (-\pi < x < \pi)$.

【2947】 在区间 $(-\pi, \pi)$ 内展开 $f(x) = \operatorname{sh} ax$.

解 因为 $f(x)$ 为奇函数, 从而, $a_0 = a_n = 0$, 且

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sh} ax \sin nx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{1}{n} \operatorname{sh} ax \cos nx \Big|_0^{\pi} + \frac{a}{n} \int_0^{\pi} \cos nx \operatorname{ch} ax dx \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sh} a\pi + \frac{a}{n^2} \operatorname{ch} ax \sin nx \Big|_0^{\pi} - \frac{a^2}{n^2} \int_0^{\pi} \operatorname{sh} ax \sin nx dx \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sh} a\pi - \frac{a^2}{n^2} \int_0^{\pi} \operatorname{sh} ax \sin nx dx \right] = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} \operatorname{sh} a\pi - \frac{a^2}{n^2} b_n, \end{aligned}$$

即 $b_n = \frac{(-1)^{n+1} 2n}{(n^2 + a^2)\pi} \operatorname{sh} a\pi$, 故按展开定理, $f(x)$ 可展开为

$$\frac{2 \operatorname{sh} a\pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n \sin nx}{n^2 + a^2} = \operatorname{sh} ax \quad (-\pi < x < \pi).$$

【2948】⁺ 在区间 $(-h, h)$ 内展开 $f(x) = e^{ax}$.

解 由于

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{h} \int_{-h}^h e^{ax} dx = \frac{1}{ah} (e^{ah} - e^{-ah}) = \frac{2}{ah} \operatorname{sh} ah, \\ a_n &= \frac{1}{h} \int_{-h}^h e^{ax} \cos \frac{n\pi x}{h} dx = \frac{1}{h} \cdot \frac{a \cos \frac{n\pi x}{h} + \frac{n\pi}{h} \sin \frac{n\pi x}{h}}{a^2 + \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2} e^{ax} \Big|_{-h}^h = \frac{(-1)^n 2ah}{(ah)^2 + (n\pi)^2} \operatorname{sh} ah; \\ b_n &= \frac{1}{h} \int_{-h}^h e^{ax} \sin \frac{n\pi x}{h} dx = \frac{1}{h} \cdot \frac{a \sin \frac{n\pi x}{h} - \frac{n\pi}{h} \cos \frac{n\pi x}{h}}{a^2 + \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2} e^{ax} \Big|_{-h}^h = \frac{(-1)^{n+1} 2n\pi}{(ah)^2 + (n\pi)^2} \operatorname{sh} ah, \end{aligned}$$

故按展开定理, $f(x)$ 可展开为

$$2 \operatorname{sh} ah \left[\frac{1}{2ah} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{ah \cos \frac{n\pi x}{h} - n\pi \sin \frac{n\pi x}{h}}{(ah)^2 + (n\pi)^2} \right] = e^{ax} \quad (-h < x < h).$$

【2949】 在区间 $(a, a+2l)$ 内展开 $f(x)=x$.

解 由于

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_a^{a+2l} x dx = 2(a+l),$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_a^{a+2l} x \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{n\pi} x \sin \frac{n\pi x}{l} \Big|_a^{a+2l} - \frac{1}{n\pi} \int_a^{a+2l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{2l}{n\pi} \sin \frac{n\pi a}{l};$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_a^{a+2l} x \sin \frac{n\pi x}{l} dx = -\frac{1}{n\pi} x \cos \frac{n\pi x}{l} \Big|_a^{a+2l} + \frac{1}{n\pi} \int_a^{a+2l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx = -\frac{2l}{n\pi} \cos \frac{n\pi a}{l},$$

故按展开定理, $f(x)$ 可展开为

$$a+l + \frac{2l}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\sin \frac{n\pi a}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} - \cos \frac{n\pi a}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \right) = x \quad (a < x < a+2l).$$

【2950】 在区间 $(-\pi, \pi)$ 内展开 $f(x)=x \sin x$.

解 因为 $f(x)$ 为偶函数, 从而, $b_n=0$, 且

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin x dx = \frac{2}{\pi} \left(-x \cos x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx \right) = 2,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin x \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x [\sin(n+1)x - \sin(n-1)x] dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{x \cos(n+1)x}{n+1} + \frac{\sin(n+1)x}{(n+1)^2} + \frac{x \cos(n-1)x}{n-1} - \frac{\sin(n-1)x}{(n-1)^2} \right] \Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{2(-1)^{n+1}}{n^2-1} \quad (n=2, 3, \dots), \end{aligned}$$

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin x \cos x dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin 2x dx = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{x}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x \right] \Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{2},$$

故按展开定理, $f(x)$ 可展开为 $1 - \frac{1}{2} \cos x + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2-1} \cos nx = x \sin x \quad (-\pi < x < \pi)$.

【2951】 在区间 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内展开 $f(x)=x \cos x$.

解 因为 $f(x)$ 为奇函数, 从而, $a_0=a_n=0$, 且

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \sin 2nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x [\sin(2n+1)x + \sin(2n-1)x] dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{x \cos(2n+1)x}{2n+1} + \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^2} - \frac{x \cos(2n-1)x}{2n-1} + \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2} \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{(-1)^{n+1} 16}{\pi} \frac{n}{(4n^2-1)^2}. \end{aligned}$$

故按展开定理, $f(x)$ 可展开为 $\frac{16}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{(4n^2-1)^2} \sin 2nx = x \cos x \quad (-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2})$.

将下列周期函数展开成傅里叶级数:

【2952】 $f(x)=\operatorname{sgn}(\cos x)$.

解 由于

$$f(x+2\pi) = \operatorname{sgn}[\cos(x+2\pi)] = \operatorname{sgn}(\cos x) = f(x),$$

故 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数, 又 $f(x)$ 为偶函数, 从而, $b_n=0$, 且

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sgn}(\cos x) dx = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-1) dx \right) = 0,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sgn}(\cos x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos nx dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos nx dx \right)$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} \right) = \frac{4}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2}$$

$$= \begin{cases} 0, & n=2k \ (k=1,2,3,\dots), \\ (-1)^k \frac{4}{(2k+1)\pi}, & n=2k+1 \ (k=0,1,2,\dots), \end{cases}$$

故按展开定理, $f(x)$ 可展开为 $\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left[(-1)^k \frac{\cos(2k+1)x}{2k+1} \right] = \operatorname{sgn}(\cos x) \quad (-\pi < x < \pi).$

注意 此式在 $f(x)$ 的不连续点 $x = -\frac{\pi}{2}$ 和 $x = \frac{\pi}{2}$ 也成立, 这是因为在这些点满足 $f(x) = \frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)]$. 于是, 上述展式对一切 $-\infty < x < +\infty$ 皆成立.

【2953】 $f(x) = \arcsin(\sin x)$.

解 $f(x)$ 是以 2π 为周期的连续周期函数, 又 $f(x)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 内为一奇函数, 从而, $a_0 = a_n = 0$, 且

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \arcsin(\sin x) \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin nx \, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\pi - x) \sin nx \, dx \right]$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\left(-\frac{x}{n} \cos nx + \frac{1}{n^2} \sin nx \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{n} \cos nx \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \left(\frac{x}{n} \cos nx - \frac{1}{n^2} \sin nx \right) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right] = \frac{4}{n^2 \pi} \sin \frac{n\pi}{2}$$

$$= \begin{cases} 0, & n=2k \ (k=1,2,3,\dots), \\ (-1)^k \frac{4}{\pi(2k+1)^2}, & n=2k+1 \ (k=0,1,2,\dots), \end{cases}$$

故按展开定理, $f(x)$ 可展开为 $\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \sin(2k+1)x = \arcsin(\sin x), \quad (-\infty < x < +\infty).$

【2954】 $f(x) = \arcsin(\cos x)$.

解 $f(x)$ 是以 2π 为周期的连续周期函数, 又 $f(x)$ 为偶函数, 从而, $b_n = 0$, 且

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \arcsin(\cos x) \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \, dx = 0,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \arcsin(\cos x) \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \cos nx \, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\frac{\pi}{2n} \sin nx - \frac{x}{n} \sin nx - \frac{1}{n^2} \cos nx \right] \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n^2} [1 - (-1)^n]$$

$$= \begin{cases} 0, & n=2k \ (k=1,2,3,\dots), \\ \frac{4}{(2k+1)^2 \pi}, & n=2k+1 \ (k=0,1,2,\dots), \end{cases}$$

故按展开定理, $f(x)$ 可展开为 $\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} = \arcsin(\cos x) \quad (-\infty < x < +\infty).$

【2955】 $f(x) = x - [x]$.

提示 注意函数 $f(x)$ 的周期为 1.

解 因为

$$f(x+1) = x+1 - [x+1] = x+1 - [x] - 1 = x - [x] = f(x),$$

故 $f(x)$ 是以 1 为周期的周期函数, 而且, 除 $x = k, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 诸点外, $f(x)$ 都连续. 由于

$$a_0 = \frac{1}{1} \int_0^1 \{x - [x]\} \, dx = 2 \int_0^1 x \, dx = 1,$$

$$a_n = \frac{1}{1} \int_0^1 \{x - [x]\} \cos 2n\pi x \, dx = 2 \int_0^1 x \cos 2n\pi x \, dx$$

$$= 2 \left[\frac{x}{2n\pi} \sin 2n\pi x + \frac{1}{4(n\pi)^2} \cos 2n\pi x \right] \Big|_0^1 = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{1} \int_0^1 \{x - [x]\} \sin 2n\pi x \, dx = 2 \int_0^1 x \sin 2n\pi x \, dx$$

$$= 2 \left[-\frac{x}{2n\pi} \cos 2n\pi x + \frac{1}{4(n\pi)^2} \sin 2n\pi x \right] \Big|_0^1 = -\frac{1}{n\pi},$$

故按展开定理, $f(x)$ 可展开为 $\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\pi x}{n} = x - [x] \quad (x \neq k, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$.

【2956】 $f(x) = (x)$, 其中 (x) 是 x 到与它最近的整数的距离.

提示 与 2955 题相同.

解 $f(x)$ 是以 1 为周期的连续周期函数. 由于

$$a_0 = 2 \int_0^1 (x) dx = 2 \left[\int_0^{\frac{1}{2}} x dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x) dx \right] = \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned} a_n &= 2 \int_0^1 (x) \cos 2n\pi x dx = 2 \left[\int_0^{\frac{1}{2}} x \cos 2n\pi x dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x) \cos 2n\pi x dx \right] \\ &= 2 \left\{ \left[\frac{x}{2n\pi} \sin 2n\pi x + \frac{1}{4(n\pi)^2} \cos 2n\pi x \right] \Big|_0^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{1}{2n\pi} \sin 2n\pi x - \frac{x}{2n\pi} \sin 2n\pi x - \frac{1}{4(n\pi)^2} \cos 2n\pi x \right] \Big|_{\frac{1}{2}}^1 \right\} \\ &= \frac{1}{(n\pi)^2} [(-1)^n - 1] \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} 0, & n=2k \quad (k=1, 2, 3, \dots), \\ -\frac{2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{(2k+1)^2}, & n=2k+1 \quad (k=0, 1, 2, \dots), \end{cases}$$

$$\begin{aligned} b_n &= 2 \left[\int_0^{\frac{1}{2}} x \sin 2n\pi x dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x) \sin 2n\pi x dx \right] \\ &= 2 \left\{ \left[-\frac{x}{2n\pi} \cos 2n\pi x + \frac{1}{4(n\pi)^2} \sin 2n\pi x \right] \Big|_0^{\frac{1}{2}} + \left[-\frac{1}{2n\pi} \cos 2n\pi x + \frac{x}{2n\pi} \cos 2n\pi x - \frac{1}{4(n\pi)^2} \sin 2n\pi x \right] \Big|_{\frac{1}{2}}^1 \right\} \\ &= 0, \end{aligned}$$

故按展开定理, $f(x)$ 可展开为 $\frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos 2\pi(2k+1)x}{(2k+1)^2} = (x) \quad (-\infty < x < +\infty)$.

【2957】 $f(x) = |\sin x|$.

解 $f(x)$ 是以 π 为周期的连续周期函数, 又 $f(x)$ 为偶函数, 从而, $b_n = 0$, 且

$$a_0 = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| dx = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{4}{\pi},$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| \cos 2nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin(2n+1)x - \sin(2n-1)x] dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{1}{2n+1} \cos(2n+1)x + \frac{1}{2n-1} \cos(2n-1)x \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{4}{\pi} \frac{1}{4n^2-1}, \end{aligned}$$

故按展开定理, $f(x)$ 可展开为 $\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2-1} = |\sin x| \quad (-\infty < x < +\infty)$.

【2958】 $f(x) = |\cos x|$.

解 由于

$$f(x) = |\cos x| = \left| \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \right|,$$

$$\begin{aligned} \text{故有 } |\cos x| &= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n \left(x + \frac{\pi}{2} \right)}{4n^2-1} = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos 2nx}{4n^2-1} \\ &= \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos 2nx}{4n^2-1} \quad (-\infty < x < +\infty). \end{aligned}$$

*) 利用 2957 题的结果.

【2959】 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \frac{\sin nx}{\sin x} \quad (|a| < 1)$.

解 显然 $p_n(x) = \frac{\sin nx}{\sin x}$ 是 $-\infty < x < +\infty$ 的连续函数, 注意, 当 $x = k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时, 函数值理解为其极限值

$$\lim_{x \rightarrow k\pi} \frac{\sin nx}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow k\pi} \frac{n \cos nx}{\cos x} = n(-1)^{(n-1)k},$$

并且 $p_n(x)$ 是一个周期为 2π 的周期函数且为偶函数. 此外,

$$p_n(x) = \frac{\sin nx}{\sin x} = \frac{\sin(n-1)x \cos x + \cos(n-1)x \sin x}{\sin x} = p_{n-1}(x) \cos x + \cos(n-1)x,$$

故

$$|p_n(x)| \leq |p_{n-1}(x)| + 1 \quad (-\infty < x < +\infty; n=2, 3, \dots).$$

注意到 $p_1(x) \equiv 1$, 由上式, 利用数学归纳法即知,

$$|p_n(x)| \leq n \quad (-\infty < x < +\infty; n=1, 2, \dots).$$

于是,

$$\left| a^n \frac{\sin nx}{\sin x} \right| \leq n |a|^n \quad (-\infty < x < +\infty; n=1, 2, \dots).$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n |a|^n$ 收敛 (因为 $|a| < 1$), 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a^n \frac{\sin nx}{\sin x}$ 在 $-\infty < x < +\infty$ 上一致收敛. 由此可知, $f(x)$

$= \sum_{n=1}^{\infty} a^n \frac{\sin nx}{\sin x}$ 是 $-\infty < x < +\infty$ 上的连续函数, 且在任何有限区间上均可逐项积分.

注意到 $f(x)$ 为以 2π 为周期的周期函数, 并且是偶函数, 故 $b_n = 0$, 且

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} a^n \frac{\sin nx}{\sin x} dx = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} a^n \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x} dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\sum_{n=2, 4, \dots} a^n \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x} dx + \sum_{n=1, 3, \dots} a^n \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x} dx \right] = 2 \sum_{k=0}^{\infty} a^{2k+1} = \frac{2a}{1-a^2}, \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} a^m \int_0^{\pi} \frac{\sin mx \cos nx}{\sin x} dx = \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} a^m \int_0^{\pi} \frac{\sin(m+n)x + \sin(m-n)x}{\sin x} dx = I_1 + I_2, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{\pi} \sum_{m \leq n} a^m \int_0^{\pi} \frac{\sin(m+n)x + \sin(m-n)x}{\sin x} dx, \\ I_2 &= \frac{1}{\pi} \sum_{m > n} a^m \int_0^{\pi} \frac{\sin(m+n)x + \sin(m-n)x}{\sin x} dx. \end{aligned}$$

当 $m \leq n$ 时, 不论 $m+n$ 及 $m-n$ 是偶数, 还是 $m+n$ 及 $m-n$ 是奇数, I_1 中诸积分都为零, 故有 $I_1 = 0$. 当 $m > n$ 时, 若 $m+n$ 及 $m-n$ 为偶数, 则 I_2 中对应的积分等于零; 若 $m+n$ 及 $m-n$ 为奇数, 则 I_2 中对应的积分等于 2π . 于是,

$$I_2 = 2 \sum_{k=0}^{\infty} a^{(2k+1)+n} = 2 \cdot \frac{a^{n+1}}{1-a^2}.$$

由于 $a_n = I_2$, 故按展开定理, $f(x)$ 可展开为

$$f(x) = \frac{a}{1-a^2} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos nx \right) \quad (-\infty < x < +\infty).$$

*) 利用 2291 题的结果.

【2960】⁺ 把函数 $f(x) = \sec x$ ($-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$) 展开为傅里叶级数.

解 显然 $f(x) = \sec x$ 在 $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ 内连续, 而且是偶函数, 故 $b_n = 0$, 且

$$a_0 = \frac{8}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x dx = \frac{8}{\pi} \left[\ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{8}{\pi} \left[\ln \left| \frac{\sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})}{\cos(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})} \right| \right] \bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{8}{\pi} \left[\ln \left| \frac{1 - \cos(x + \frac{x}{2})}{\sin(x + \frac{x}{2})} \right| \right] \bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{8}{\pi} \left[\ln \left| \frac{1 + \sin x}{\cos x} \right| \right] \bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{8}{\pi} \ln(1 + \sqrt{2}), \\
a_n &= \frac{8}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 4nx}{\cos x} dx \quad (n=1, 2, \dots).
\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}
\cos 4nx - \cos(4nx - 4x) &= -2\sin(4nx - 2x)\sin 2x = -4\sin(4nx - 2x)\sin x \cos x \\
&= 2[\cos(4nx - x) - \cos(4nx - 3x)]\cos x,
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{8}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 4nx}{\cos x} dx \\
&= \frac{16}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} [\cos(4n-1)x - \cos(4n-3)x] dx + \frac{8}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 4(n-1)x}{\cos x} dx \\
&= \frac{16}{\pi} \left[\frac{1}{4n-1} \sin\left(n\pi - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{4n-3} \sin\left(n\pi - \frac{3}{4}\pi\right) \right] + a_{n-1} \\
&= \frac{16}{\pi} \left[\frac{(-1)^{n-1}}{4n-1} \sin \frac{\pi}{4} - \frac{(-1)^{n-1}}{4n-3} \sin \frac{3\pi}{4} \right] + a_{n-1} \\
&= \frac{16}{\pi} (-1)^n \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-1} \right) + a_{n-1} \\
&= \frac{16}{\pi} \frac{\sqrt{2}(-1)^n}{(4n-3)(4n-1)} + a_{n-1} \quad (n=1, 2, \dots).
\end{aligned}$$

由此递推公式,得

$$a_n = \frac{16\sqrt{2}}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{(4k-3)(4k-1)} + a_0 = \frac{16\sqrt{2}}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{(4k-3)(4k-1)} + \frac{8}{\pi} \ln(1 + \sqrt{2}) \quad (n=1, 2, \dots).$$

于是,下面的展式成立:

$$\sec x = \frac{4}{\pi} \ln(1 + \sqrt{2}) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{8}{\pi} \ln(1 + \sqrt{2}) - \frac{16\sqrt{2}}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{(4k-3)(4k-1)} \right] \cos 4nx \quad \left(-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}\right).$$

【2961】 将函数 $f(x) = x^2$ 展开成傅里叶级数:(1)在区间 $(-\pi, \pi)$ 内按倍角的余弦展开;(2)在区间 $(0, \pi)$ 内按倍角的正弦展开;(3)在区间 $(0, 2\pi)$ 内展开.

绘出函数的图像及情形(1)、(2)与(3)的傅里叶级数之和的图像.

利用这些展开式,求级数的和: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

解 (1) 由于 $b_n = 0$, 且

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3}, \\
a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \left(\frac{x^2}{n} \sin nx + \frac{2x}{n^2} \cos nx - \frac{2}{n^3} \sin nx \right) \bigg|_0^{\pi} = (-1)^n \frac{4}{n^2},
\end{aligned}$$

故 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上按余弦展开为 $\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx = x^2 \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$.

(2) 由于 $a_0 = a_n = 0$, 且

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \left(-\frac{x^2}{n} \cos nx + \frac{2x}{n^2} \sin nx + \frac{2}{n^3} \cos nx \right) \bigg|_0^{\pi}$$

$$= \frac{2\pi}{n}(-1)^{n+1} + \frac{4}{n^3\pi}[(-1)^n - 1],$$

故 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上按正弦展开为 $2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx - \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^3} = x^2 \quad (0 \leq x < \pi)$.

(3) 由于 $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{8\pi^2}{3}$,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \left(\frac{x^2}{n} \sin nx + \frac{2x}{n^2} \cos nx - \frac{2}{n^3} \sin nx \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{n^2},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \left(-\frac{x^2}{n} \cos nx + \frac{2x}{n^2} \sin nx + \frac{2}{n^3} \cos nx \right) \Big|_0^{2\pi} = -\frac{4\pi}{n},$$

故 $f(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 上可展开为 $\frac{4\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} - 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = x^2 \quad (0 < x < 2\pi)$.

函数的图像, (1)、(2) 及 (3) 的傅里叶级数之和的图像, 如图 5.4、图 5.5、图 5.6 及图 5.7 所示.

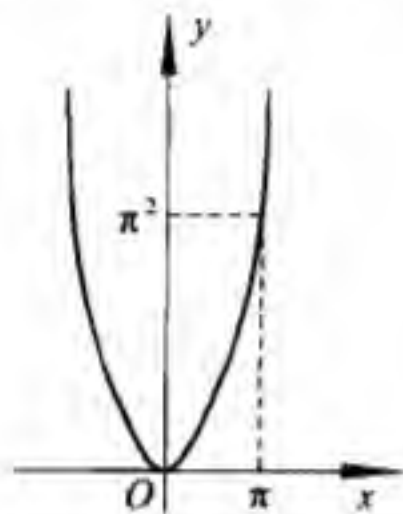


图 5.4

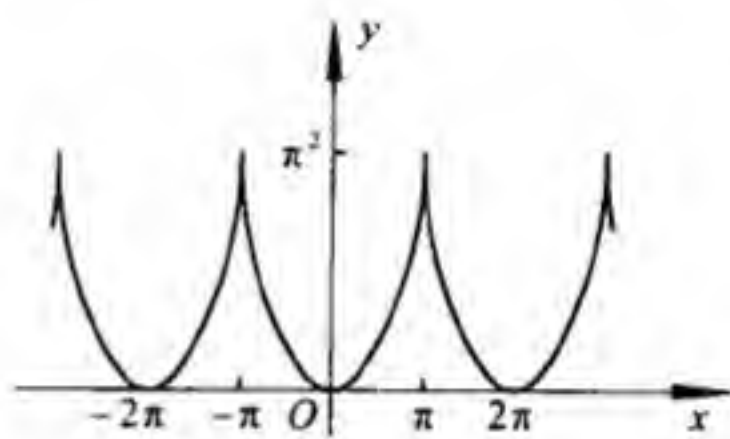


图 5.5

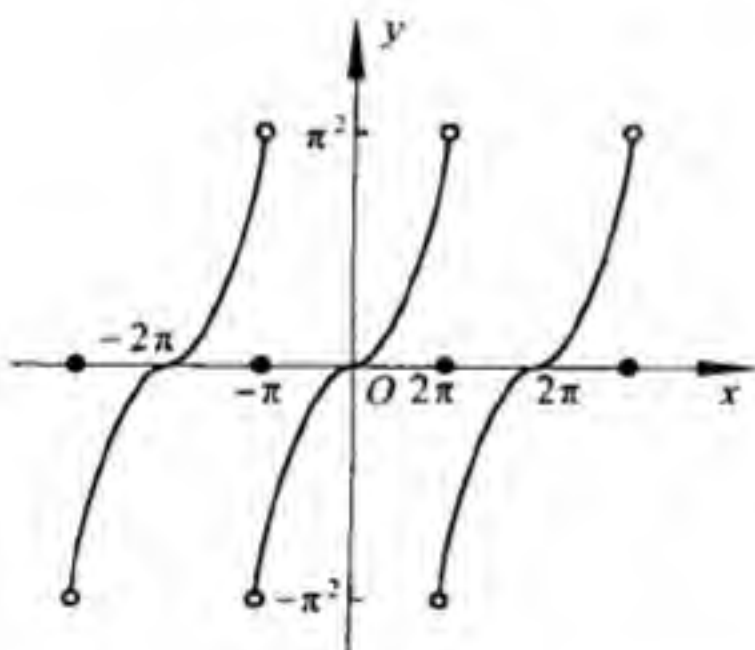


图 5.6

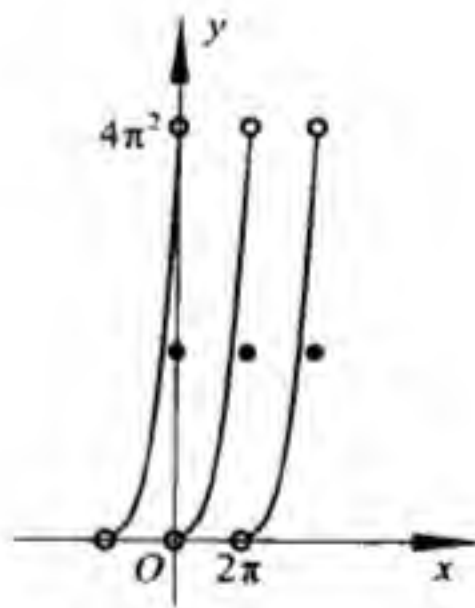


图 5.7

若在展开式(1)中令 $x = \pi$, 则得 $\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} (-1)^n = \pi^2$, 于是,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \quad (1')$$

若在展开式(3)中令 $x = \pi$, 则得 $\frac{4\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \pi^2$, 于是,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}. \quad (2')$$

将级数(1')和(2')相加, 得 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \right] = \frac{\pi^2}{4}$, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}. \quad (3')$$

【2962】 由展开式

$$x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n} \quad (-\pi < x < \pi),$$

用逐项积分的方法,求函数 x^2, x^3 和 x^4 在区间 $(-\pi, \pi)$ 内的傅里叶级数.

解 将原式在 $[0, x]$ 上逐项积分,得

$$\frac{x^2}{2} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx - 1}{n^2}.$$

由于

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12},$$

代入上式,即得

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2} \quad (-\pi < x < \pi). \quad (1)$$

将(1)式在 $[0, x]$ 上逐项积分,并将 $x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$ 的结果代入,即得

$$x^3 = 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n} + 12 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n^3} \quad (-\pi < x < \pi). \quad (2)$$

将上式从 $-\pi$ 到 x 积分,并以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$ 代入,得

$$\frac{x^4}{4} - \frac{\pi^4}{4} = 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2} - 2\pi^2 \cdot \frac{\pi^2}{6} + 12 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos nx}{n^4} + 12 \cdot \frac{\pi^4}{90},$$

即

$$x^4 = \frac{\pi^4}{5} + 8\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2} + 48 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos nx}{n^4} \quad (-\pi \leq x \leq \pi). \quad (3)$$

*) 由 $x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}$ 及

$$x^3 = 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n} + 12 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n^3} = \pi^2 x + 12 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n^3},$$

得

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n^3} = \frac{\pi^2 x - x^3}{12} \quad (-\pi \leq x \leq \pi).$$

将上式从 0 到 x 积分,得

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx - 1}{n^4} = \frac{2\pi^2 x^2 - x^4}{48} \quad (-\pi \leq x \leq \pi).$$

以 $x = \pi$ 代入,得 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1 - (-1)^n}{n^4} = \frac{\pi^4}{48}$, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}. \quad (4)$$

由于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \quad (5)$$

收敛,故可设其和为 S . 于是,由(5)-(4)得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^4} = S - \frac{\pi^4}{96},$$

即 $\frac{S}{16} = S - \frac{\pi^4}{96}$, 从而, $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$. 同时,还可求出 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^4} = \frac{\pi^4}{2^4 \cdot 90}$ 及

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^4} = \pi^4 \left(\frac{1}{96} - \frac{1}{2^4 \cdot 90} \right) = \frac{7}{720} \pi^4.$$

也可利用此结果求得 x^4 的展开式,事实上,将 x^3 的展开式从 0 到 x 积分,再以

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \quad \text{及} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} = \frac{7\pi^4}{720}$$

代入即得.

【2963】 写出函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < a, \\ 0, & a < |x| < \pi \end{cases}$ 的李雅普诺夫等式.

利用李雅普诺夫等式,求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 na}{n^2}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 na}{n^2}$ 之和.

解 由于 $f(x)$ 为偶函数,从而, $b_n = 0$, 且

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^a dx = \frac{2a}{\pi}, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^a \cos nx dx = \frac{2 \sin na}{n\pi},$$

又 $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^a dx = \frac{2a}{\pi}$, 故对应于 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上展开的李雅普诺夫等式为

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{2a^2}{\pi^2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 na}{n^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{2a}{\pi}.$$

于是, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 na}{n^2} = \frac{a(\pi-a)}{2}$, 而

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 na}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 na}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{a(\pi-a)}{2} = \frac{\pi^2 - 3\pi a + 3a^2}{6}.$$

*) 利用 2961 题的结果.

【2964】 将函数 $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & 1 < x < 2, \\ 3-x, & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$ 展开成傅里叶级数.

解 将 $f(x)$ 在 $[0, 3]$ 上按周期为 3 作傅里叶展开, 注意其图像, 易见 $f(x)$ 的延拓(周期为 3)是偶函数, 从而, $b_n = 0$, 且

$$a_0 = \frac{1}{3} \int_0^3 f(x) dx = \frac{2}{3} \int_0^1 x dx + \frac{2}{3} \int_1^2 dx + \frac{2}{3} \int_2^3 (3-x) dx = \frac{4}{3},$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{3} \int_0^1 x \cos \frac{2n\pi x}{3} dx + \frac{2}{3} \int_1^2 \cos \frac{2n\pi x}{3} dx + \frac{2}{3} \int_2^3 (3-x) \cos \frac{2n\pi x}{3} dx \\ &= \frac{2}{3} \left\{ \left[\frac{3}{2n\pi} x \sin \frac{2n\pi x}{3} + \frac{9}{4n^2\pi^2} \cos \frac{2n\pi x}{3} \right] \Big|_0^1 + \frac{3}{2n\pi} \sin \frac{2n\pi x}{3} \Big|_1^2 \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{9}{2n\pi} \sin \frac{2n\pi x}{3} - \frac{3}{2n\pi} x \sin \frac{2n\pi x}{3} - \frac{9}{4n^2\pi^2} \cos \frac{2n\pi x}{3} \right] \Big|_2^3 \right\} \\ &= \frac{2}{3} \left[-\frac{9}{2(n\pi)^2} + \frac{9}{4(n\pi)^2} \left(\cos \frac{2n\pi}{3} + \cos \frac{4n\pi}{3} \right) \right] = -\frac{3}{(n\pi)^2} + \frac{3}{(n\pi)^2} (-1)^n \cos \frac{n\pi}{3}, \end{aligned}$$

故按展开定理, $f(x)$ 在 $[0, 3]$ 可按余弦展开为

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi}{3} \right] \cos \frac{2n\pi x}{3} = f(x).$$

由于

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi}{3} \right] \cos \frac{2n\pi x}{3} \\ &= \left(-\frac{1}{1^2} - \frac{1}{1^2} \cdot \frac{1}{2} \right) \cos \frac{2\pi x}{3} + \left(-\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{2} \right) \cos \frac{4\pi x}{3} + \left(-\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} \right) \cos 2\pi x \\ &\quad + \left(-\frac{1}{4^2} - \frac{1}{4^2} \cdot \frac{1}{2} \right) \cos \frac{8\pi x}{3} + \left(-\frac{1}{5^2} - \frac{1}{5^2} \cdot \frac{1}{2} \right) \cos \frac{10\pi x}{3} + \left(-\frac{1}{6^2} + \frac{1}{6^2} \right) \cos 4\pi x + \cdots \\ &= -\frac{3}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos \frac{2n\pi x}{3} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos 2n\pi x, \end{aligned}$$

故 $f(x)$ 的余弦展开式可写为

$$\frac{2}{3} - \frac{9}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos \frac{2n\pi x}{3} + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos 2n\pi x = f(x) \quad (0 \leq x \leq 3).$$

利用公式 $\cos x = \frac{1}{2}(t + \bar{t})$, $\sin x = \frac{1}{2i}(t - \bar{t})$, 式中 $t = e^{ix}$ 及 $\bar{t} = e^{-ix}$, 将下列函数展开成傅里叶

级数:

【2965】 $\cos^{2m} x$ (m 为正整数).

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \cos^{2m} x &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^{2m} = \frac{1}{2^{2m}} \sum_{l=0}^{2m} C_{2m}^l e^{i(2m-l)x} e^{-ilx} = \frac{1}{2^{2m}} C_{2m}^m + \frac{1}{2^{2m}} \left(\sum_{l=0}^{m-1} + \sum_{l=m+1}^{2m} \right) C_{2m}^l e^{2(m-l)x} \\ &= \frac{1}{2^{2m}} C_{2m}^m + \frac{1}{2^{2m}} \left[\sum_{l=0}^{m-1} C_{2m}^l e^{2(m-l)x} + \sum_{l'=0}^{m-1} C_{2m}^{2m-l'} e^{-2(m-l')x} \right] \\ &= \frac{1}{2^{2m}} C_{2m}^m + \frac{1}{2^{2m}} \sum_{s=0}^{m-1} C_{2m}^s [e^{2(m-s)x} + e^{-2(m-s)x}] = \frac{1}{2^{2m}} C_{2m}^m + \frac{1}{2^{2m-1}} \sum_{s=0}^{m-1} C_{2m}^s \cos 2(m-s)x \\ &= \frac{1}{2^{2m}} C_{2m}^m + \frac{1}{2^{2m-1}} \sum_{k=1}^m C_{2m-k}^m \cos 2kx. \end{aligned}$$

由于上述表达式为一三角多项式, 故在 $(-\infty, +\infty)$ 内的傅里叶级数展开式即为它本身.

【2966】 $\frac{q \sin x}{1 - 2q \cos x + q^2} \quad (|q| < 1).$

解 由于

$$\begin{aligned} \frac{q \sin x}{1 - 2q \cos x + q^2} &= \frac{\frac{q}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})}{1 - q(e^{ix} + e^{-ix}) + q^2} = \frac{1}{2i} \frac{q(e^{ix} - e^{-ix})}{(1 - qe^{ix})(1 - qe^{-ix})} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{1 - qe^{ix}} - \frac{1}{1 - qe^{-ix}} \right) \\ &= \frac{1}{2i} [(1 + qe^{ix} + q^2 e^{2ix} + \dots) - (1 + qe^{-ix} + q^2 e^{-2ix} + \dots)] = q \sin x + q^2 \sin 2x + \dots, \end{aligned}$$

及级数

$$q \sin x + q^2 \sin 2x + \dots + q^n \sin nx + \dots$$

满足 $|q^n \sin nx| \leq q^n$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ ($|q| < 1$) 收敛, 故级数在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛. 因此, 级数

$$q \sin x + q^2 \sin 2x + \dots + q^n \sin nx + \dots$$

即为其和 $\frac{q \sin x}{1 - 2q \cos x + q^2}$ (它是周期为 2π 的奇函数) 的傅里叶级数, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n \sin nx = \frac{q \sin x}{1 - 2q \cos x + q^2} \quad (-\infty < x < +\infty).$$

【2967】 $\frac{1 - q^2}{1 - 2q \cos x + q^2} \quad (|q| < 1).$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \text{由于} \quad \frac{1 - q^2}{1 - 2q \cos x + q^2} &= \frac{1 - q^2}{1 - q(e^{ix} + e^{-ix}) + q^2} = (1 - q^2) \frac{1}{(1 - qe^{ix})(1 - qe^{-ix})} \\ &= -1 + \frac{1}{1 - qe^{ix}} + \frac{1}{1 - qe^{-ix}} \\ &= -1 + (1 + qe^{ix} + q^2 e^{2ix} + \dots) + (1 + qe^{-ix} + q^2 e^{-2ix} + \dots) \\ &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^n \cos nx. \end{aligned}$$

又上式右端的级数在 $(-\infty, +\infty)$ 内一致收敛, 因而, 它就是函数 $\frac{1 - q^2}{1 - 2q \cos x + q^2}$ 在 $-\infty < x < +\infty$ 内的傅里叶级数.

【2968】 $\frac{1 - q \cos x}{1 - 2q \cos x + q^2} \quad (|q| < 1).$

解 由于

$$\begin{aligned}
\frac{1-q\cos x}{1-2q\cos x+q^2} &= \frac{1-\frac{q}{2}(e^{ix}+e^{-ix})}{1-q(e^{ix}+e^{-ix})+q^2} \\
&= \frac{1}{2} \frac{2-qe^{ix}-qe^{-ix}}{(1-qe^{ix})(1-qe^{-ix})} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-qe^{ix}} + \frac{1}{1-qe^{-ix}} \right) \\
&= \frac{1}{2} [(1+qe^{ix}+q^2e^{2ix}+\cdots) + (1+qe^{-ix}+q^2e^{-2ix}+\cdots)] \\
&= 1+q\cos x+q^2\cos 2x+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \cos nx,
\end{aligned}$$

又上式右端的级数在 $(-\infty, +\infty)$ 内一致收敛, 因而它就是函数 $\frac{1-q\cos x}{1-2q\cos x+q^2}$ 在 $-\infty < x < +\infty$ 内的傅里叶级数.

【2969】 $\ln(1-2q\cos x+q^2)$ ($|q| < 1$).

解 由于 $1-2q\cos x+q^2 \geq 1-2q+q^2 = (1-q)^2 > 0$, 故 $\ln(1-2q\cos x+q^2)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 内的连续函数, 而且是周期为 2π 的偶函数, 将函数对求 x 导数, 得

$$[\ln(1-2q\cos x+q^2)]' = \frac{2q\sin x}{1-2q\cos x+q^2} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^n \sin nx \quad (-\infty < x < +\infty).$$

对上式从0到 x 积分(由于上式中级数在 $(-\infty, +\infty)$ 内一致收敛, 故可在有限区间上逐项积分), 则有

$$\begin{aligned}
\ln(1-2q\cos x+q^2) &= \int_0^x \frac{2q\sin x}{1-2q\cos x+q^2} dx + 2\ln(1-q) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x q^n \sin nx dx + 2\ln(1-q) \\
&= -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} \cos nx + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} + 2\ln(1-q).
\end{aligned}$$

而 $\ln(1-q) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n}$, 于是,

$$\ln(1-2q\cos x+q^2) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} \cos nx \quad (-\infty < x < +\infty).$$

由于右端级数在 $(-\infty, +\infty)$ 内一致收敛, 故它就是左端函数的傅里叶级数.

*) 利用 2966 题的结果

将下列无界周期函数展开成傅里叶级数:

【2970】 $f(x) = \ln \left| \sin \frac{x}{2} \right|$.

解 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数, 当 $x=2k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$)时函数有无穷不连续点. 由于 $f(x)$ 是偶函数, 从而 $b_n=0$, 且

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \ln \sin \frac{x}{2} dx = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t dt = \frac{4}{\pi} \left(-\frac{\pi}{2} \ln 2 \right) = -2 \ln 2, \\
a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \ln \sin \frac{x}{2} \cos nx dx = \frac{2}{n\pi} \sin nx \ln \sin \frac{x}{2} \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin nx \cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} dx \\
&= -\frac{1}{2n\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x + \sin \left(n - \frac{1}{2} \right) x}{\sin \frac{x}{2}} dx \\
&= -\frac{1}{n\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} dt - \frac{1}{n\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n-1)t}{\sin t} dt,
\end{aligned}$$

由于

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx = \pi \quad (n=0, 1, 2, \cdots),$$

故

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx = \pi.$$

在上式左端第二个积分中令 $\pi - x = u$, 即得与第一个积分相同的积分, 从而,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

利用这一结果, 易得

$$a_n = -\frac{1}{n}, \quad (n=1, 2, \dots).$$

由于 $f(x) = \ln \left| \sin \frac{x}{2} \right|$ 在 $(-\pi, \pi)$ 内绝对可积 (参看上面 a_0 计算):

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx = 2 \int_0^{\pi} \left| \ln \sin \frac{x}{2} \right| dx = -2 \int_0^{\pi} \ln \sin \frac{x}{2} dx = 2\pi \ln 2 < +\infty,$$

且除 $x = 2k\pi (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 诸点外, 在其他的点 $f(x)$ 均可微, 故根据傅里叶级数收敛的 Lipschitz 判别法 (参看 T. M. 菲赫金哥尔茨著, 微积分学教程, 第三卷第三分册 658 目) 知, 除上述诸点外, $f(x)$ 的傅里叶级数收敛于 $f(x)$ 本身, 即

$$\ln \left| \sin \frac{x}{2} \right| = -\ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} \quad (x \neq 2k\pi; k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

*) 利用 2353 题的结果.

* *) 利用 2291 题的结果.

【2971】 $f(x) = \ln \left| \cos \frac{x}{2} \right|.$

提示 利用 2970 题的结果.

解 利用 2970 题的结果, 即得

$$\ln \left| \cos \frac{x}{2} \right| = \ln \left| \sin \frac{\pi - x}{2} \right| = -\ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n(\pi - x)}{n} = -\ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cos nx$$

$$(x \neq (2m+1)\pi; m=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

【2972】 $f(x) = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right|.$

提示 利用 2970 题及 2971 题的结果.

解 利用 2970 题及 2971 题的结果, 即得

$$\begin{aligned} \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| &= \ln \left| \sin \frac{x}{2} \right| - \ln \left| \cos \frac{x}{2} \right| \\ &= \left[-\ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} \right] - \left[-\ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cos nx \right] \\ &= -2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{2k+1} \quad (x \neq k\pi; k=0, \pm 1, \pm 2, \dots). \end{aligned}$$

【2973】 将函数 $f(x) = \int_0^x \ln \sqrt{\left| \cot \frac{t}{2} \right|} dt \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$ 展开成傅里叶级数.

解 将函数对 x 求导数, 则得

$$f'(x) = \frac{1}{2} \ln \left| \cot \frac{x}{2} \right| = -\frac{1}{2} \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{2k+1}.$$

由于

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| = \frac{1}{2} \ln \left| \cos \frac{x}{2} \right| - \frac{1}{2} \ln \left| \sin \frac{x}{2} \right|$$

在 $(-\pi, \pi)$ 内绝对可积, 故得 $\int_0^x \ln \sqrt{\left| \cot \frac{t}{2} \right|} dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^2} \quad (-\pi \leq x \leq \pi).$

*) 利用 2972 题的结果.

【2974】 函数 $x=x(s), y=y(s) \quad (0 \leq s \leq 4a)$ 是正方形: $0 < x < a, 0 < y < a$ 的围线的参数方程, 其中 s

为依逆时针方向从点 $O(0,0)$ 起计算的弧长. 试将这两个函数展开成傅里叶级数.

解 根据定义, $x(s)$ 的表达式可写为

$$x(s) = \begin{cases} s, & 0 \leq s \leq a, \\ a, & a \leq s \leq 2a, \\ 3a-s, & 2a \leq s \leq 3a, \\ 0, & 3a \leq s \leq 4a. \end{cases}$$

于是, $x(s)$ 在 $[0, 4a]$ 上的傅里叶级数展开式为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi s}{2a} + b_n \sin \frac{n\pi s}{2a} \right),$$

其中

$$a_0 = \frac{1}{2a} \int_0^{4a} x(s) ds = \frac{1}{2a} \left[\int_0^a s ds + \int_a^{2a} a ds + \int_{2a}^{3a} (3a-s) ds \right] = a,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2a} \int_0^{4a} x(s) \cos \frac{n\pi s}{2a} ds \\ &= \frac{1}{2a} \left[\int_0^a s \cos \frac{n\pi s}{2a} ds + \int_a^{2a} a \cos \frac{n\pi s}{2a} ds + \int_{2a}^{3a} (3a-s) \cos \frac{n\pi s}{2a} ds \right] \\ &= \frac{1}{2a} \left\{ \left[\frac{2a^2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} + \left(\frac{2a}{n\pi} \right)^2 \left(\cos \frac{n\pi}{2} - 1 \right) \right] + \left[-\frac{2a^2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[\left(\frac{6a^2}{n\pi} \sin \frac{3n\pi}{2} \right) - \frac{6a^2}{n\pi} \sin \frac{3n\pi}{2} - \left(\frac{2a}{n\pi} \right)^2 \left(\cos \frac{3n\pi}{2} - \cos n\pi \right) \right] \right\} \\ &= \frac{2a}{(n\pi)^2} \left(\cos \frac{n\pi}{2} - 1 - \cos \frac{3n\pi}{2} + \cos n\pi \right) \\ &= \begin{cases} 0, & n=2k, k=1, 2, 3, \dots; \\ -\frac{4a}{\pi^2 (2k+1)^2}, & n=2k+1, k=0, 1, 2, 3, \dots. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2a} \int_0^{4a} x(s) \sin \frac{n\pi s}{2a} ds \\ &= \frac{1}{2a} \left[\int_0^a s \sin \frac{n\pi s}{2a} ds + \int_a^{2a} a \sin \frac{n\pi s}{2a} ds + \int_{2a}^{3a} (3a-s) \sin \frac{n\pi s}{2a} ds \right] \\ &= \frac{1}{2a} \left\{ \left[-\frac{2a^2}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} + \left(\frac{2a}{n\pi} \right)^2 \sin \frac{n\pi}{2} \right] + \left[-\frac{2a^2}{n\pi} \cos n\pi + \frac{2a^2}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[\left(-\frac{6a^2}{n\pi} \cos \frac{3n\pi}{2} + \frac{6a^2}{n\pi} \cos n\pi \right) + \left(\frac{6a^2}{n\pi} \cos \frac{3n\pi}{2} - \frac{4a^2}{n\pi} \cos n\pi \right) + \left(-\frac{4a^2}{n^2 \pi^2} \sin \frac{3n\pi}{2} \right) \right] \right\} \\ &= \frac{2a}{n^2 \pi^2} \left(\sin \frac{n\pi}{2} - \sin \frac{3n\pi}{2} \right) \\ &= \begin{cases} 0, & n=2k, k=1, 2, 3, \dots, \\ \frac{4a(-1)^k}{\pi^2 (2k+1)^2}, & n=2k+1, k=0, 1, 2, 3, \dots. \end{cases} \end{aligned}$$

因此, 按展开定理, 注意到 $x(0)=x(4a)$, $x(s)$ 的傅里叶展开式为

$$x(s) = \frac{a}{2} - \frac{4a}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos \frac{(2k+1)\pi s}{2a} + \frac{4a}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \sin \frac{(2k+1)\pi s}{2a} \quad (0 \leq s \leq 4a).$$

同样, 根据定义, $y(s)$ 的表达式为

$$y(s) = \begin{cases} 0, & 0 \leq s \leq a, \\ s-a, & a \leq s \leq 2a, \\ a, & 2a \leq s \leq 3a, \\ 4a-s, & 3a \leq s \leq 4a. \end{cases}$$

于是, $y(s)$ 在 $[0, 4a]$ 上的傅里叶级数展开式为

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi s}{2a} + B_n \sin \frac{n\pi s}{2a} \right),$$

其中

$$A_0 = \frac{1}{2a} \int_a^{4a} y(s) ds = \frac{1}{2a} \left[\int_a^{2a} (s-a) ds + \int_{2a}^{3a} a ds + \int_{3a}^{4a} (4a-s) ds \right] = a,$$

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{2a} \int_a^{4a} y(s) \cos \frac{n\pi s}{2a} ds \\ &= \frac{1}{2a} \left[\int_a^{2a} (s-a) \cos \frac{n\pi s}{2a} ds + \int_{2a}^{3a} a \cos \frac{n\pi s}{2a} ds + \int_{3a}^{4a} (4a-s) \cos \frac{n\pi s}{2a} ds \right] \\ &= \frac{1}{2a} \left\{ \left[\left(-\frac{2a^2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{4a^2}{n^2\pi^2} (\cos n\pi - \cos \frac{n\pi}{2}) \right) - \left(-\frac{2a^2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{2a^2}{n\pi} \sin \frac{3n\pi}{2} \right] + \left[\left(-\frac{8a^2}{n\pi} \sin \frac{3n\pi}{2} \right) - \left(-\frac{6a^2}{n\pi} \sin \frac{3n\pi}{2} + \frac{4a^2}{n^2\pi^2} - \frac{4a^2}{n^2\pi^2} \cos \frac{3n\pi}{2} \right) \right] \right\} \\ &= \frac{2a}{n^2\pi^2} \left(\cos n\pi - \cos \frac{n\pi}{2} - 1 + \cos \frac{3n\pi}{2} \right) \\ &= \begin{cases} 0, & n=2k, k=1,2,3,\dots, \\ -\frac{4a}{\pi^2(2k+1)^2}, & n=2k+1, k=0,1,2,3,\dots, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{1}{2a} \int_a^{4a} y(s) \frac{n\pi s}{2a} ds \\ &= \frac{1}{2a} \left[\int_a^{2a} (s-a) \sin \frac{n\pi s}{2a} ds + \int_{2a}^{3a} a \sin \frac{n\pi s}{2a} ds + \int_{3a}^{4a} (4a-s) \sin \frac{n\pi s}{2a} ds \right] \\ &= \frac{1}{2a} \left\{ \left[\left(-\frac{4a^2}{n\pi} \cos n\pi + \frac{2a^2}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} - \frac{4a^2}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} \right) - \left(-\frac{2a^2}{n\pi} \cos n\pi + \frac{2a^2}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \left(-\frac{2a^2}{n\pi} \cos \frac{3n\pi}{2} + \frac{2a^2}{n\pi} \cos n\pi \right) + \left[\left(-\frac{8a^2}{n\pi} + \frac{8a^2}{n\pi} \cos \frac{3n\pi}{2} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(-\frac{8a^2}{n\pi} - \frac{6a^2}{n\pi} \cos \frac{3n\pi}{2} - \frac{4a^2}{n^2\pi^2} \sin \frac{3n\pi}{2} \right) \right] \right\} \\ &= \frac{2a}{n^2\pi^2} \left(\sin \frac{3n\pi}{2} - \sin \frac{n\pi}{2} \right) \\ &= \begin{cases} 0, & n=2k, k=1,2,3,\dots, \\ \frac{4a(-1)^{k+1}}{\pi^2(2k+1)^2}, & n=2k+1, k=0,1,2,3,\dots. \end{cases} \end{aligned}$$

因此,按展开定理,注意到 $y(0)=y(4a)$, 得 $y(s)$ 的傅里叶级数展开式为

$$y(s) = \frac{a}{2} - \frac{4a}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos \frac{(2k+1)\pi s}{2a} + \frac{4a}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2} \sin \frac{(2k+1)\pi s}{2a} \quad (0 \leq s \leq 4a).$$

【2975】 应当如何把给定在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内的可积函数 $f(x)$ 延拓到区间 $(-\pi, \pi)$ 内, 使得它展开成傅里叶级数后具有以下形式:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2n-1)x \quad (-\pi < x < \pi)?$$

提示 应有 $f(-x)=f(x)$, $f(\pi-x)=-f(x)$ $(-\pi < x < \pi)$.

解 由于展开式中无正弦项, 故 $f(x)$ 延拓到 $(-\pi, \pi)$ 内应满足 $f(-x)=f(x)$. 函数 $f(x)$ 延拓到 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 的部分记以 $g(x)$, 则按题设应有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos 2nxdx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} g(x) \cos 2nxdx = 0 \quad (n=0,1,2,\dots).$$

在上式左端第一个积分中作代换 $\pi-x=y$, 即得

$$-\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} f(\pi-y) \cos 2nydy + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} g(x) \cos 2nxdx = 0,$$

也即

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} [f(\pi-x) + g(x)] \cos 2nxdx = 0 \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

为要上式成立, 显然只要求对于 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 内任一 x 值, 恒有

$$f(\pi-x) + g(x) = 0, \quad \text{即} \quad g(x) = -f(\pi-x).$$

总之, 首先要在 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 内定义一个函数, 使它等于 $-f(\pi-x)$; 然后, 再按偶函数延拓到 $(-\pi, 0)$, 不妨将延拓到 $(-\pi, \pi)$ 内的函数仍记为 $f(x)$, 则由上述讨论知, 必有

$$f(-x) = f(x), \quad f(\pi-x) = -f(x) \quad (-\pi < x < \pi).$$

【2976】 应当如何把给定在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内的可积函数 $f(x)$ 延拓到区间 $(-\pi, \pi)$ 内, 使得它展开成傅里叶级数后具有以下形式:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2n-1)x \quad (-\pi < x < \pi)?$$

提示 应有 $f(-x) = -f(x)$, $f(\pi-x) = f(x)$ $(-\pi < x < \pi)$.

解 由于展开式中无余弦项, 故 $f(x)$ 延拓到 $(-\pi, \pi)$ 内应满足 $f(-x) = -f(x)$. 函数 $f(x)$ 延拓到 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 的部分记以 $g(x)$, 则按题设应有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin 2nxdx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} g(x) \sin 2nxdx = 0 \quad (n=1, 2, \dots).$$

在上式左端第一个积分中作代换 $\pi-x=y$, 即得

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\pi-y) \sin 2nydy + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} g(x) \sin 2nxdx = 0.$$

也即

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} [-f(\pi-x) + g(x)] \sin 2nxdx = 0 \quad (n=1, 2, \dots).$$

为要上式成立, 显然只要求对于 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 内任一 x 值, 恒有

$$-f(\pi-x) + g(x) = 0, \quad \text{即} \quad g(x) = f(\pi-x).$$

总之, 首先要在 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 内定义一个函数, 使它等于 $f(\pi-x)$; 然后, 再按奇函数延拓到 $(-\pi, \pi)$, 不妨将延拓到 $(-\pi, \pi)$ 内的函数仍记为 $f(x)$, 则由上述讨论知, 必有

$$f(-x) = -f(x), \quad f(\pi-x) = f(x) \quad (-\pi < x < \pi).$$

【2977】 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内把函数 $f(x) = x(\frac{\pi}{2} - x)$ 展开: (1) 依角的奇倍数的余弦展开; (2) 依角的奇倍数的正弦展开.

绘出情形(1)与(2)的傅里叶级数之和的图像.

提示 (1) 利用 2975 题的结果, 延拓函数, 求出 a_{2k+1} ($k=0, 1, 2, \dots$).

(2) 利用 2976 题的结果, 延拓函数, 求出 b_{2k-1} ($k=0, 1, 2, \dots$).

解 (1) 利用 2975 题的结果, 延拓函数, 使有 $f(-x) = f(x)$, $f(\pi-x) = -f(x)$. 于是, 有

$$a_{2k+1} = \frac{2}{\pi} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos(2k+1)x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} [-f(\pi-x)] \cos(2k+1)x dx \right\}.$$

若在上式右端第二个积分中令 $\pi-x=y$, 则得到与第一个积分同样的结果, 即

$$\begin{aligned} a_{2k+1} &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos(2k+1)x dx \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \cos(2k+1)x dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{4}{(2k+1)\pi} x \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \sin(2k+1)x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{4}{(2k+1)\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right) \sin(2k+1)x dx \\
&= -\frac{4}{(2k+1)^2 \pi} \left[\frac{\pi}{2} \cos(2k+1)x - 2x \cos(2k+1)x \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{8}{(2k+1)^2 \pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2k+1)x dx \\
&= -\frac{2}{(2k+1)^2} + \frac{8}{(2k+1)^3 \pi} \sin(2k+1) \frac{\pi}{2} \\
&= -\frac{2}{(2k+1)^2} + \frac{8(-1)^k}{(2k+1)^3 \pi} \quad (k=0, 1, 2, \dots).
\end{aligned}$$

于是, $f(x)$ 的展开式为

$$\begin{aligned}
&-2 \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \left[\frac{1}{(2k+1)^2} - \frac{4}{\pi} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} \right] \cos(2k+1)x \right\} \\
&= x \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \quad (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}).
\end{aligned}$$

其和的图像如图 5.8 所示.

(2) 利用 2976 题的结果, 延拓函数, 使有

$$f(-x) = -f(x), \quad f(\pi - x) = f(x).$$

于是, 有

$$b_{2k+1} = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin(2k+1)x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\pi - x) \sin(2k+1)x dx \right].$$

若在上式右端第二个积分中令 $\pi - x = y$, 则得到与第一个积分同样的结果, 即

$$\begin{aligned}
b_{2k+1} &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin(2k+1)x dx \\
&= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \sin(2k+1)x dx \\
&= -\frac{4}{(2k+1)\pi} x \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \cos(2k+1)x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{4}{(2k+1)\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right) \cos(2k+1)x dx \\
&= -\frac{4}{(2k+1)^2 \pi} \left[\left(\frac{\pi}{2} - 2x \right) \sin(2k+1)x \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{8}{(2k+1)^2 \pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2k+1)x dx \\
&= \frac{2(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2} + \frac{8}{(2k+1)^3 \pi} \quad (k=0, 1, 2, \dots).
\end{aligned}$$

于是, $f(x)$ 的展开式为

$$2 \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \left[\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2} + \frac{4}{(2k+1)^3 \pi} \right] \sin(2k+1)x \right\} = x \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \quad (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}).$$

其和的图像如图 5.8 所示.

【2978】 设 $f(x)$ 是以为 π 周期的反周期函数, 即 $f(x+\pi) = -f(x)$. 问此函数在区间 $(-\pi, \pi)$ 内的傅里叶级数具有怎样的特性?

提示 $a_{2n} = 0$ ($n=0, 1, 2, \dots$), $b_{2n} = 0$ ($n=1, 2, \dots$).

解 由于

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \left[-\int_{\pi}^0 f(\pi+x) \cos nx dx + \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx \right] \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

故在上式右端第一个积分中令 $x+\pi=y$, 则得

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [(-1)^{n+1} + 1] f(x) \cos nx dx.$$

于是, 得 $a_{2n} = 0$ ($n=0, 1, 2, \dots$). 同理, 可得 $b_{2n} = 0$ ($n=1, 2, \dots$). 因此, 函数 $f(x)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 内的傅里叶级数的特性为

$$a_{2n} = 0 \quad (n=0, 1, 2, \dots), \quad b_{2n} = 0 \quad (n=1, 2, \dots).$$

【2979】 设 $f(x+\pi) = f(x)$, 则函数 $f(x)$ 在区间 $(-\pi, \pi)$ 内的傅里叶级数具有怎样的特性?

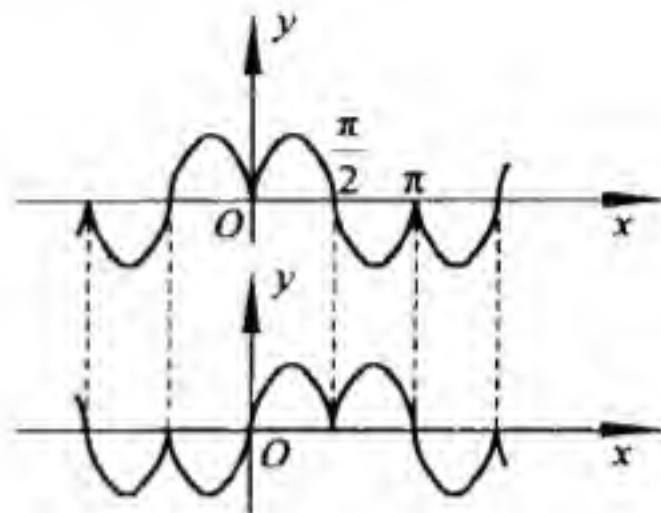


图 5.8

提示 与 2978 题解法类似, $a_{2n-1}=b_{2n-1}=0$ ($n=1,2,\cdots$).

解 与 2978 题解法类似, 我们可求得

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [(-1)^n + 1] f(x) \cos nx dx \quad (n=0,1,2,\cdots).$$

因此, 有

$$a_{2n-1}=0 \quad (n=1,2,3,\cdots).$$

同理, 可求得

$$b_{2n-1}=0 \quad (n=1,2,3,\cdots).$$

因此, 函数 $f(x)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 内的傅里叶级数的特性为 $a_{2n-1}=b_{2n-1}=0$ ($n=1,2,3,\cdots$).

【2980】 对于一个周期为 2π 的函数 $y=f(x)$, 若函数的图像: (1) 以点 $(0,0), (\pm\frac{\pi}{2}, 0)$ 为对称中心;

(2) 以坐标原点为对称中心并以 $x=\pm\frac{\pi}{2}$ 为对称轴; 问其傅里叶系数 a_n, b_n ($n=1,2,3,\cdots$) 具有怎样的特性?

提示 (1) $a_n=0$ ($n=0,1,2,\cdots$), $b_{2n-1}=0$ ($n=1,2,3,\cdots$); (2) $a_n=0$ ($n=1,2,\cdots$), $b_{2n}=0$ ($n=1,2,3,\cdots$).

解 (1) 由题设函数 $f(x)$ 满足

$$f(-x)=-f(x), \quad f(\pi-x)=-f(x).$$

因此, $a_n=0$ ($n=0,1,2,\cdots$), 且

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin nx dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi [-f(\pi-x)] \sin nx dx \right\} \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin nx dx + (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(y) \sin ny dy \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [1+(-1)^n] f(x) \sin nx dx, \end{aligned}$$

故 $b_{2n-1}=0$ ($n=1,2,\cdots$). 因此, $f(x)$ 的傅里叶级数的特性为

$$a_n=0 \quad (n=0,1,2,\cdots), \quad b_{2n-1}=0 \quad (n=1,2,3,\cdots).$$

(2) 由题设函数 $f(x)$ 满足

$$f(-x)=-f(x), \quad f(\pi-x)=f(x).$$

同(1)一样, $a_n=0$ ($n=0,1,2,\cdots$), 而

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [1+(-1)^{n+1}] f(x) \sin nx dx,$$

故 $b_{2n}=0$ ($n=1,2,3,\cdots$). 因此, $f(x)$ 的傅里叶系数的特性为

$$a_n=0 \quad (n=0,1,2,\cdots), \quad b_{2n}=0 \quad (n=1,2,3,\cdots).$$

【2981】 若函数 $\varphi(-x) \equiv \psi(x)$, 问 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 的傅里叶系数 a_n, b_n 与 α_n, β_n ($n=0,1,2,\cdots$) 之间有何关系?

提示 $a_n=\alpha_n$ ($n=0,1,2,\cdots$), $b_n=-\beta_n$ ($n=1,2,3,\cdots$).

解 函数 $\varphi(x), \psi(x)$ 的傅里叶系数分别为

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi \varphi(x) \cos nx dx, & b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi \varphi(x) \sin nx dx; \\ \alpha_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi \psi(x) \cos nx dx, & \beta_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi \psi(x) \sin nx dx. \end{aligned}$$

由于

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 \varphi(x) \cos nx dx + \int_0^\pi \varphi(x) \cos nx dx \right],$$

故在上式右端两个积分中代作换 $-x=y$, 并将 $\varphi(-x)=\psi(x)$ 代入, 即得

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^\pi \psi(x) \cos nx dx + \int_{-\pi}^0 \psi(x) \cos nx dx \right] = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi \psi(x) \cos nx dx = \alpha_n.$$

同理,有

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 \varphi(x) \sin nx dx + \int_0^{\pi} \varphi(x) \sin nx dx \right] = \frac{1}{\pi} \left[- \int_0^{\pi} \psi(x) \sin nx dx - \int_{-\pi}^0 \psi(x) \sin nx dx \right] \\ &= - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) \sin nx dx = -\beta_n. \end{aligned}$$

因此, $\varphi(x), \psi(x)$ 的傅里叶系数 a_n, b_n 与 α_n, β_n 的关系为

$$a_n = \alpha_n (n=0, 1, 2, \dots), \quad b_n = -\beta_n (n=1, 2, 3, \dots).$$

【2982】 若函数 $\varphi(-x) \equiv -\psi(x)$, 问 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 的傅里叶系数 a_n, b_n 与 $\alpha_n, \beta_n (n=0, 1, 2, \dots)$ 之间有何关系?

提示 $a_n = -\alpha_n (n=0, 1, 2, \dots), b_n = \beta_n (n=1, 2, 3, \dots)$.

解 函数 $\varphi(x), \psi(x)$ 的傅里叶系数分别为

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \cos nx dx, & b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \sin nx dx; \\ \alpha_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) \cos nx dx, & \beta_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) \sin nx dx. \end{aligned}$$

由于

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 \varphi(x) \cos nx dx + \int_0^{\pi} \varphi(x) \cos nx dx \right],$$

故在上式右端两个积分中作代换 $-x=y$, 并将 $\varphi(-x) = -\psi(x)$ 代入, 即得

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[- \int_0^{\pi} \psi(x) \cos nx dx - \int_{-\pi}^0 \psi(x) \cos nx dx \right] = - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) \cos nx dx = -\alpha_n.$$

同理, 有 $b_n = \beta_n$. 因此, $\varphi(x), \psi(x)$ 的傅里叶系数 a_n, b_n 与 α_n, β_n 的关系为

$$a_n = -\alpha_n (n=0, 1, 2, \dots), \quad b_n = \beta_n (n=1, 2, 3, \dots).$$

【2983】 已知周期为 2π 的可积函数 $f(x)$ 的傅里叶系数为 $a_n, b_n (n=0, 1, 2, \dots)$, 试计算“平移”后的函数 $f(x+h)$ (h 为常数) 的傅里叶系数 $\bar{a}_n, \bar{b}_n (n=0, 1, 2, \dots)$.

提示 $\bar{a}_n = a_n \cos nh + b_n \sin nh, \bar{b}_n = b_n \cos nh - a_n \sin nh$.

解 在傅里叶系数 \bar{a}_n 的表达式中作代换 $x+h=y$, 并注意到 $f(x)$ 的周期性, 即有

$$\begin{aligned} \bar{a}_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+h) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(y) [\cos nh \cos ny + \sin nh \sin ny] dy \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \cos nh dx + \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \sin nh dx \right] \\ &= a_n \cos nh + b_n \sin nh. \end{aligned}$$

同理, 可求得 $\bar{b}_n = b_n \cos nh - a_n \sin nh$.

【2984】 已知周期为 2π 的可积函数 $f(x)$ 的傅里叶系数为 $a_n, b_n (n=0, 1, 2, \dots)$, 试计算斯捷克洛夫函数

$$f_h(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(\xi) d\xi$$

的傅里叶系数 $A_n, B_n (n=0, 1, 2, \dots)$.

提示 $A_0 = a_0, A_n = a_n \frac{\sin nh}{nh} (n=1, 2, \dots); B_n = b_n \frac{\sin nh}{nh} (n=1, 2, \dots)$.

解 由于

$$f_h(x+2\pi) = \frac{1}{2h} \int_{x+2\pi-h}^{x+2\pi+h} f(\xi) d\xi = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(\xi) d\xi = f_h(x),$$

故 $f_h(x)$ 仍为以 2π 为周期的周期函数.

于是, 有 (作代换 $\xi = x+y$)

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_h(x) \cos nx dx = \frac{1}{2\pi h} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx \int_{x-h}^{x+h} f(\xi) d\xi = \frac{1}{2\pi h} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx \int_{-h}^h f(x+y) dy \\ &= \frac{1}{2\pi h} \int_{-h}^h dy \int_{-\pi}^{\pi} f(x+y) \cos nx dx. \end{aligned}$$

根据 2983 题的结果可知

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+y) \cos nx dx = a_n \cos ny + b_n \sin ny,$$

$$\text{故 } A_n = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h (a_n \cos ny + b_n \sin ny) dy = \frac{a_n}{h} \int_0^h \cos ny dy = \begin{cases} a_n, & n=0, \\ \frac{a_n \sin nh}{nh}, & n=1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

$$\text{即 } A_0 = a_0, A_n = \frac{a_n \sin nh}{nh} \quad (n=1, 2, 3, \dots). \text{ 同理可得 } B_n = \frac{b_n \sin nh}{nh} \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

【2985】 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数, 并且 a_n, b_n ($n=0, 1, 2, \dots$) 为其傅里叶系数. 求卷积函数

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) f(x+t) dt$$

的傅里叶系数 A_n, B_n ($n=0, 1, 2, \dots$).

利用所得的结果, 推出李雅普诺夫等式.

提示 $A_0 = a_0^2$, $A_n = a_n^2 + b_n^2$ ($n=1, 2, 3, \dots$); $b_n = 0$ ($n=1, 2, 3, \dots$). 由此易得李雅普诺夫等式.

$$\text{解 由于 } F(x+2\pi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) f(x+2\pi+t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) f(x+t) dt = F(x),$$

故 $F(x)$ 仍为以 2π 为周期的函数. 于是, 有

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) dx = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} dx \int_{-\pi}^{\pi} f(t) f(x+t) dt = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \int_{-\pi-t}^{\pi-t} f(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{\pi^2} \left[\int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \right]^2 = a_0^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx \int_{-\pi}^{\pi} f(t) f(x+t) dt \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \int_{-\pi-t}^{\pi-t} f(\xi) (\cos n\xi \cos nt + \sin n\xi \sin nt) d\xi \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [a_n f(t) \cos nt + b_n f(t) \sin nt] dt = a_n^2 + b_n^2 \quad (n=1, 2, 3, \dots); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx \int_{-\pi}^{\pi} f(t) f(x+t) dt \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \sin nx dx \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \int_{-\pi-t}^{\pi-t} f(\xi) (\sin n\xi \cos nt - \cos n\xi \sin nt) d\xi \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [b_n f(t) \cos nt - a_n f(t) \sin nt] dt = b_n a_n - a_n b_n = 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots). \end{aligned}$$

由 $f(x)$ 的连续性知, $F(x)$ 不仅以 2π 为周期而且是连续函数, 故按展开定理, 注意到 $B_n = 0$ ($n=1, 2, 3, \dots$), 即得

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx.$$

因此, 特别地, 有

$$F(0) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n.$$

但已知 $A_0 = a_0^2$, $A_n = a_n^2 + b_n^2$, 且

$$F(0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) f(0+t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt,$$

故得

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

这就是李雅普诺夫等式.

§ 7. 级数求和法

1° 直接求和法 若 $u_n = v_{n+1} - v_n$ ($n=1, 2, \dots$) 及 $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v_\infty$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = v_\infty - v_1.$$

特别地, 若 $u_n = \frac{1}{a_n a_{n+1} \cdots a_{n+m}}$, 其中数 a_i ($i=1, 2, \dots$) 组成以 d 为公差的等差数列, 则

$$v_n = -\frac{1}{md} \cdot \frac{1}{a_n a_{n+1} \cdots a_{n+m-1}}.$$

在某些情形下, 未知级数能表示为下列已知级数的线性组合:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12},$$

等等.

2° 阿贝尔方法 若级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛, 则

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

在最简单的例子中, 借助于逐项微分法或积分法来求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和.

3° 三角级数求和法 为了求级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx \quad \text{及} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin nx$$

的和, 通常把前者视为复数域内的幂级数: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ (其中 $z = e^{ix}$) 的实的实部, 而把后者视为该幂级数的和的虚部的系数.

在许多情形下级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \ln \frac{1}{1-z} \quad (|z| < 1)$$

是有用的.

求下列级数的和:

【2986】 $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots$

提示 注意 $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$.

解 由 $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$, 得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \dots \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2N+1} \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

【2987】 $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots$

提示 注意 $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right]$, 并利用 2549 题的结果.

解 由 $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right]$, 并注意到 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$, 即得

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \cdots \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right] \\
&= \frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{2} \right] \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

*) 利用 2549 题的结果,

【2988】 $\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5} + \cdots$.

解 $\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5} + \cdots$

$$\begin{aligned}
&= \left(1 - \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \cdots \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 2 \left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \right] + (-1)^{n+2} \frac{1}{n+1} - 1 \right\} = 2 \ln 2 - 1.
\end{aligned}$$

【2989】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

提示 注意 $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{2}{n+3} = \frac{3n+5}{(n+1)(n+2)(n+3)}$, 并利用 2987 题的结果.

解 由于 $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{2}{n+3} = \frac{3n+5}{(n+1)(n+2)(n+3)}$, 故

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} &= \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{2}{n+3} \right) - \frac{5}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \\
&= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \right) - \frac{5}{3} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \right)^{*)} = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

*) 利用 2987 题的结果.

【2990】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+m)}$ (m 为正整数).

解 由 $\frac{1}{n(n+m)} = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+m} \right)$, 考虑适当大的正整数 N , 并令 $N \rightarrow \infty$, 即得

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+m)} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+m)} = \frac{1}{m} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+m} \right) \\
&= \frac{1}{m} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2} - \cdots - \frac{1}{N+m} \right) \\
&= \frac{1}{m} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m} \right).
\end{aligned}$$

【2991】 $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \cdots$.

解 由 $\frac{1}{(2n-1)2n(2n+1)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(2n-1)2n} - \frac{1}{2n(2n+1)} \right]$, 得

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)2n(2n+1)} + \cdots \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{5 \cdot 6} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)2n} - \frac{1}{2n(2n+1)} + \cdots \right] \\
&= \frac{1}{2} (2 \ln 2 - 1)^{*)} = \ln 2 - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

*) 注意原级数的绝对收敛性, 并利用 2988 题的结果.

【2992】 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$.

$$\begin{aligned}\text{解 } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=2}^N \frac{1}{n^2-1} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=2}^N \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{N+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

$$\text{【2993】 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}.$$

解 由 $\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$, 得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \left(\frac{\pi^2}{6} - 1 \right) = 1.$$

*) 所写级数均为绝对收敛级数, 并利用 2961 题的结果 (或本节前言).

$$\text{【2994】 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)}.$$

提示 利用 146 题的结果.

解 由 $\frac{1}{n(2n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{2}{2n+1}$, 得

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^N \frac{1}{n(2n+1)} &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - 2 \sum_{n=1}^N \frac{1}{2n+1} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - 2 \left(\sum_{n_1=1}^{2N+1} \frac{1}{n_1} - \frac{1}{2} \sum_{n_2=1}^N \frac{1}{n_2} - 1 \right) \\ &= (C + \ln N + \epsilon_1) - 2 \left[(C + \ln(2N+1) + \epsilon_2) - \frac{1}{2} (C + \ln N + \epsilon_3) - 1 \right]^{**} \\ &= 2 \ln \frac{N}{2N+1} + \alpha + 2,\end{aligned}$$

其中 $\epsilon_1 \rightarrow 0, \epsilon_2 \rightarrow 0, \epsilon_3 \rightarrow 0, \alpha = \epsilon_1 - 2\epsilon_2 + \epsilon_3 \rightarrow 0$ (当 $N \rightarrow \infty$), 于是,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(2n+1)} = 2 \ln \frac{1}{2} + 2 = 2(1 - \ln 2),$$

$$\text{即 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)} = 2(1 - \ln 2).$$

*) 利用 146 题的结果.

$$\text{【2995】 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}.$$

$$\begin{aligned}\text{解 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{n^2}{n!} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ 1 + 2 + \sum_{n=3}^N \frac{n^2}{n!} \right\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ 3 + \sum_{n=3}^N \left[\frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-2)!} \right] \right\} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ 3 + \sum_{k=2}^{N-1} \frac{1}{k!} + \sum_{l=1}^{N-2} \frac{1}{l!} \right\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ 2 \left(1 + \sum_{s=1}^N \frac{1}{s!} \right) + O\left(\frac{1}{N}\right) \right\} = 2e.\end{aligned}$$

$$\text{【2996】 } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{n!}.$$

$$\text{解 } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n-1)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = 2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^m}{m!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}.$$

利用级数运算的性质可知, 对于绝对收敛的级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$, 有下述等式:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n,$$

其中 $d_n = \sum_{k+l=n} \frac{1}{k!l!} = \frac{1}{n!} \sum_{k+l=n} \frac{n!}{k!l!} = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^n C_n^i = \frac{2^n}{n!}$, 故得 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \right)^2 = e^2$, 因此,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{n!} = 3e^2.$$

$$\text{【2997】 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2}.$$

提示 注意 $\frac{1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{2}{n(n+1)}$, 并利用 2549 题及 2961 题的结果.

解 由 $\frac{1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{2}{n(n+1)}$, 得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{\pi^2}{6} + \left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right) - 2 \cdot 1 = \frac{\pi^2}{3} - 3.$$

*) 所写级数均为绝对收敛级数, 并利用 2549 题及 2961 题的结果.

【2998】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2(n+2)^2}.$

解 首先, 注意到

$$\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} - \frac{2}{n^2} + \frac{6}{n(n+1)(n+2)} = -\frac{3}{(n+1)^2(n+2)^2} - \frac{12n+8}{n^2(n+1)^2(n+2)^2}, \quad (1)$$

$$2 \left[\frac{1}{n^2(n+1)^2} + \frac{1}{n^2(n+2)^2} - \frac{2}{(n+1)^2(n+2)^2} \right] = \frac{12n+10}{n^2(n+1)^2(n+2)^2}, \quad (2)$$

$$\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+2)^2} - \frac{2}{n(n+2)} = \frac{4}{n^2(n+2)^2} \quad (3)$$

将(1)、(2)、(3)三式相加, 合并整理可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(n+2)^2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n(n+2)} + \frac{6}{n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)^2(n+2)^2} + \frac{2}{n^2(n+1)^2} \\ &= \frac{2}{n^2(n+1)^2(n+2)^2}. \end{aligned}$$

其次, 先后利用 2961 题、2990 题、2987 题和 2997 题的结果, 即得

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2(n+2)^2} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{3}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^2} - \frac{3}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} + 6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \right. \\ & \quad \left. - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2(n+2)^2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right) + \frac{3}{2} \left(\frac{\pi^2}{6} - 1 - \frac{1}{4}\right) - \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) + 6 \cdot \frac{1}{4} - \left(\frac{\pi^2}{3} - 3 - \frac{1}{4}\right) + 2 \left(\frac{\pi^2}{3} - 3\right) \right\} \\ &= \frac{\pi^2}{4} - \frac{39}{16}. \end{aligned}$$

【2999】 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}.$

解 注意到

$$-\frac{1}{3!} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \right), \quad \frac{2}{5!} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} \right), \quad \dots \quad \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!} = \frac{(-1)^n}{2} \left[\frac{1}{(2n)!} - \frac{1}{(2n+1)!} \right], \quad \dots$$

相加即得

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} - \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \right]^{**} = \frac{1}{2} (\cos 1 - \sin 1). \end{aligned}$$

*) 由于级数绝对收敛, 从而其和与项相加的顺序无关.

【3000】 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+n-2}.$

解 考虑部分和

$$S_N = \sum_{n=2}^N \frac{(-1)^n}{n^2+n-2} = \sum_{n=2}^N \frac{(-1)^n}{3} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \frac{1}{3} \sum_{l=4}^{N+2} \frac{(-1)^{l+1}}{l}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{3} \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{1}{3} \left(-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + O\left(\frac{1}{N}\right) \\
&= \frac{2}{3} \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \frac{5}{18} + O\left(\frac{1}{N}\right) = \frac{2}{3} \ln 2 - \frac{5}{18} + O\left(\frac{1}{N}\right),
\end{aligned}$$

故得 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+n-2} = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \frac{2}{3} \ln 2 - \frac{5}{18} = \frac{1}{18} (12 \ln 2 - 5)$.

【3001】 设 $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$. 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P(n)}{n!} x^n$ 的和.

解 令 $P(n) = a_0 + a_1 n + \cdots + a_m n^m = a_0 + a_1 n + \cdots + a_m n(n-1)\cdots(n-m+1)$,
其中 $a_i (i=0, 1, \cdots, m)$ 可由上述恒等式求出, 则

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P(n)}{n!} x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_0 + a_1 n + \cdots + a_m n(n-1)\cdots(n-m+1)}{n!} x^n \\
&= a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + a_1 x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + a_m x^m \sum_{n=m}^{\infty} \frac{x^{n-m}}{(n-m)!} \\
&= a_0 e^x + a_1 x e^x + \cdots + a_m x^m e^x = e^x (a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m).
\end{aligned}$$

求下列级数的和:

【3002】 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{2^n n!} x^n$.

解 对于任意的 x , 考虑部分和

$$\begin{aligned}
S_N &= \sum_{n=0}^N \frac{n^2+1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n = 1 + 2\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{5}{2!} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \sum_{n=3}^N \left[\frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} \right] \left(\frac{x}{2}\right)^n \\
&= \left[\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \sum_{k=1}^N \frac{1}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^k \right] + \left[\left(\frac{x}{2}\right) + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right) \sum_{l=2}^N \frac{1}{l!} \left(\frac{x}{2}\right)^l \right] \\
&\quad + \left[1 + \left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \sum_{n=3}^N \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n \right] + O\left(\frac{1}{N^2}\right) \\
&= \left(\frac{x}{2}\right)^2 \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^k + \left(\frac{x}{2}\right) \sum_{l=0}^N \frac{1}{l!} \left(\frac{x}{2}\right)^l + \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n + O\left(\frac{1}{N^2}\right) \\
&= \left[\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right) + 1 \right] \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n + O\left(\frac{1}{N^2}\right),
\end{aligned}$$

故得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n = \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4}\right) e^{\frac{x}{2}}.$$

【3003】 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{(n+1)!} x^n$.

提示 注意 $\frac{n^3}{(n+1)!} = \frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$.

解 由 $\frac{n^3}{(n+1)!} = \frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$, 得

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{(n+1)!} x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{(n+1)!} (-x)^n \\
&= \frac{1}{2} (-x) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-x)^n}{(n-2)!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-x)^n}{(n+1)!} \\
&= -\frac{x}{2} + x^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-x)^{n-2}}{(n-2)!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} + \frac{1}{x} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!} \\
&= -\frac{x}{2} + x^2 e^{-x} + (e^{-x} - 1 + x) + \frac{1}{x} (e^{-x} - 1 + x - \frac{x^2}{2!})
\end{aligned}$$

$$= e^{-x} \left(x^2 + 1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x}.$$

【3004】 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n^2+1)}{(2n)!} x^{2n}.$

解 由 $\frac{2n^2+1}{(2n)!} = \frac{1}{2} \frac{1}{(2n-2)!} + \frac{1}{2} \frac{1}{(2n-1)!} + \frac{1}{(2n)!}$, 得

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n^2+1)}{(2n)!} x^{2n} &= 1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-2)!} x^{2n} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} x^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!} x^{2n-2} - \frac{x}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} - 1 \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} \cos x - \frac{x}{2} \sin x + \cos x - 1 = \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \cos x - \frac{x}{2} \sin x. \end{aligned}$$

【3005】 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{(2n+1)!}.$

解 (1) 若 $x=0$, 则级数的和显然为零.

(2) 若 $x>0$, 记 $t=\sqrt{x}$. 考虑部分和, 并注意: 当任意固定 x 时, 某些常见幂级数的收敛性, 下述记号 $o(1)$ 是指当 $N \rightarrow \infty$ 时的无穷小量. 于是, 有

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=0}^N \frac{n^2 t^{2n}}{(2n+1)!} = \frac{1}{4t} \sum_{n=0}^N \frac{(2n)^2 - 1}{(2n+1)!} t^{2n+1} + \frac{1}{4t} \sum_{n=0}^N \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \frac{1}{4t} \sum_{n=0}^N \frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n+1)!} t^{2n+1} + \frac{1}{4t} \operatorname{sh} t + o(1) \\ &= \frac{1}{4t} \left[t^2 \sum_{n=1}^N \frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!} - t \sum_{n=0}^N \frac{t^{2n}}{(2n)!} \right] + \frac{1}{4t} \operatorname{sh} t + o(1) \\ &= \frac{1}{4t} [t^2 \operatorname{sh} t - t \operatorname{ch} t + o(1)] + \frac{1}{4t} \operatorname{sh} t + o(1) = \frac{1}{4} \left(\frac{t^2+1}{t} \operatorname{sh} t - \operatorname{ch} t \right) + o(1) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{x+1}{\sqrt{x}} \operatorname{sh} \sqrt{x} - \operatorname{ch} \sqrt{x} \right) + o(1). \end{aligned}$$

因此, 当 $x>0$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{(2n+1)!} = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \frac{1}{4} \left(\frac{x+1}{\sqrt{x}} \operatorname{sh} \sqrt{x} - \operatorname{ch} \sqrt{x} \right).$

(3) 若 $x<0$, 记 $y=\sqrt{|x|}$, 则 $x=-y^2$. 与上述讨论类似, 有

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=0}^N \frac{n^2 (-1)^n y^{2n}}{(2n+1)!} = \frac{1}{4y} \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n [(2n)^2 - 1]}{(2n+1)!} y^{2n+1} + \frac{1}{4y} \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n y^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \frac{1}{4y} \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n (2n-1)(2n+1)}{(2n+1)!} y^{2n+1} + \frac{1}{4y} \sin y + o(1) \\ &= \frac{1}{4y} \left[y^2 \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n y^{2n-1}}{(2n-1)!} - y \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n y^{2n}}{(2n)!} \right] + \frac{1}{4y} \sin y + o(1) \\ &= \frac{1}{4y} [-y^2 \sin y - y \cos y + o(1)] + \frac{1}{4y} \sin y + o(1) = \frac{1}{4} \left(\frac{-y^2+1}{y} \sin y - \cos y \right) + o(1) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{x+1}{\sqrt{|x|}} \sin \sqrt{|x|} - \cos \sqrt{|x|} \right) + o(1). \end{aligned}$$

因此, 当 $x<0$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{(2n+1)!} = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \frac{1}{4} \left(\frac{x+1}{\sqrt{|x|}} \sin \sqrt{|x|} - \cos \sqrt{|x|} \right).$

利用逐项微分法求级数的和:

【3006】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$

解 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$, 故收敛半径为 1. 当 $x=1$ 时, 级数发散; 当 $x=-1$ 时, 级数收敛. 因

此,级数的收敛域为 $[-1,1)$.

当 $x \in [-1,1)$ 时,令 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$. 当 $|x| < 1$ 时,逐项微分之,得

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}.$$

由于 $f(0)=0$,故得

$$f(x) = \int_0^x f'(t) dt = \int_0^x \frac{dt}{1-t} = \ln \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1). \quad (1)$$

由上述幂级数在 $x=-1$ 的收敛性,且其和为 $-\ln 2 = \ln \frac{1}{2}$,利用阿贝尔定理知,上述结果(1)当 $-1 \leq x < 1$ 时成立.

【3007】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{n(2n-1)}.$

解 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{n(2n-1)} = 1$,故收敛半径为1. 当 $|x|=1$ 时,级数绝对收敛. 因此,级数的收敛域为 $[-1,1]$.

当 $x \in [-1,1]$ 时,令 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{n(2n-1)}$. 当 $|x| < 1$ 时,逐项微分之,得

$$f'(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1} = 2 \arctan x.$$

由于 $f(0)=0$,故得

$$f(x) = \int_0^x f'(t) dt = 2 \int_0^x \arctan t dt = 2x \arctan x - 2 \int_0^x \frac{t}{1+t^2} dt = 2x \arctan x - \ln(1+x^2). \quad (1)$$

当 $|x|=1$ 时,级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 2 \cdot \frac{\pi}{4} - \ln 2 = \frac{\pi}{2} - \ln 2.$$

利用阿贝尔定理知,上述结果(1)包括端点在内也成立,即当 $-1 \leq x \leq 1$ 时,(1)式成立.

*) 利用 2907 题的结果.

**) 利用 2938 题的结果.

【3008】 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}.$

解 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+5}{4n+1} = 1$,故收敛半径为1. 当 $|x|=1$ 时,级数发散. 因此,级数的收敛域为 $(-1,1)$.

当 $x \in (-1,1)$ 时,令 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$. 逐项微分之,得 $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{4n} = \frac{1}{1-x^4}$. 由于 $f(0)=0$,故得

$$f(x) = \int_0^x f'(t) dt = \int_0^x \frac{dt}{1-t^4} = \frac{1}{2} \int_0^x \frac{dt}{1-t^2} + \frac{1}{2} \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \arctan x \quad (|x| < 1).$$

【3009】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+d) \cdots [a+(n-1)d]}{d \cdot 2d \cdots nd} x^n \quad (d > 0).$

提示 用 $(1-x)$ 去乘级数的导数,得一阶线性微分方程并求其解.

解 首先,应设

$$a \neq -md \quad (m=0,1,2,\cdots),$$

因为否则,若 $a = -md$ (m —某正整数或零),则原级数从 $m+1$ 项开始恒为零,此时原级数为一多项式

$$\sum_{n=1}^m \frac{a(a+d) \cdots [a+(n-1)d]}{d \cdot 2d \cdots nd} x^n,$$

它对任何 x 均收敛.

令 $a_n = \frac{a(a+d) \cdots [a+(n-1)d]}{d \cdot 2d \cdots nd} \quad (n=1,2,3,\cdots)$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)d}{a+nd} = 1,$$

故收敛半径为 1. 以下先设 $|x| < 1$ 求原级数的和, 最后再考虑端点 $x = \pm 1$ 时的情形.

当 $x \in (-1, 1)$ 时, 令

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+d) \cdots [a+(n-1)d]}{d \cdot 2d \cdots nd} x^n.$$

逐项微分之, 得

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+d) \cdots [a+(n-1)d]}{d \cdot d \cdot 2d \cdots (n-1)d} x^{n-1}.$$

以 $(1-x)$ 乘上式两端, 得

$$(1-x)f'(x) = \frac{a}{d} + \frac{a}{d} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+d) \cdots [a+(n-1)d]}{d \cdot 2d \cdots nd} x^n = \frac{a}{d} + \frac{a}{d} f(x),$$

上述方程系一阶线性微分方程:

$$f'(x) - \frac{a}{d} \cdot \frac{1}{1-x} f(x) = \frac{a}{d} \cdot \frac{1}{1-x}.$$

解之, 得

$$f(x) = C(1-x)^{-\frac{a}{d}} - 1 \quad (-1 < x < 1),$$

其中 C 为常数. 由于 $f(0) = 0$, 故得 $0 = C - 1$, 即 $C = 1$. 于是, 当 $|x| < 1$ 时,

$$f(x) = (1-x)^{-\frac{a}{d}} - 1. \quad (1)$$

最后, 考虑端点 $x = \pm 1$ 的情形, 先考虑 $x = 1$. 此时原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. 由于当 n 充分大时, $a+nd > 0$, 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(d-a)n}{a+nd} = \frac{d-a}{d}.$$

于是, 根据拉比判别法可知, 当 $a < 0$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛, 当 $a > 0$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散; 但当 $a > 0$ 时, $a_n > 0$. 由此可知: 当 $a < 0$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 当 $a > 0$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

再考虑 $x = -1$. 此时原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$. 当 $a < 0$ 时, 前面已证 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 收敛. 下设 $a > 0$, 若 $a \geq d$, 则

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(n+1)d}{a+nd} \leq 1,$$

故

$$a_{n+1} \geq a_n > 0 \quad (n=1, 2, \cdots).$$

于是, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 的通项不趋于零, 因此, 它发散. 下设 $0 < a < d$. 于是, 有

$$\ln a_n = \sum_{k=1}^n \ln \left[\frac{a+(k-1)d}{kd} \right] = \sum_{k=1}^n \ln \left(1 - \frac{d-a}{kd} \right). \quad (2)$$

由于 $0 < a < d$, 故 $\ln(1 - \frac{d-a}{kd}) < 0$ ($k=1, 2, 3, \cdots$). 注意到

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 - \frac{d-a}{kd})}{-\frac{d-a}{kd}} = 1,$$

而级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ 发散, 即知级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1 - \frac{d-a}{kd})$ 发散, 从而 (它的每一项都是负的),

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1 - \frac{d-a}{kd}) = -\infty.$$

于是,根据(2)式即知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n = -\infty$, 从而,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0. \quad (3)$$

另外,因 $0 < a < d$, 有 $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(n+1)d}{a+nd} > 1$, 故

$$a_n > a_{n+1} > 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots). \quad (4)$$

于是,由(3)式及(4)式,根据莱布尼茨判别法知,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 收敛.

综上所述,并根据幂级数的阿贝尔定理,即知:当 $a < 0$ 时,原幂级数的收敛域为 $-1 \leq x \leq 1$, 且在其上,公式(1)成立;当 $0 < a < d$ 时,原幂级数的收敛域为 $-1 \leq x < 1$, 且在其上,公式(1)成立;当 $a \geq d$ 时,原幂级数的收敛域为 $-1 < x < 1$, 且在其上,公式(1)成立.

【3010】 $\frac{1}{3} \left(\frac{x}{2} \right) + \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 6} \left(\frac{x}{2} \right)^2 + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{3 \cdot 6 \cdot 9} \left(\frac{x}{2} \right)^3 + \dots$

提示 用 $(1 - \frac{x}{2})$ 去乘级数的导数,并仿 3009 题.

解 记 $a_n = \frac{1 \cdot 4 \cdots (3n-2)}{3 \cdot 6 \cdots 3n} \cdot \frac{1}{2^n}$, 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(3n+3)}{3n+1} = 2,$$

故收敛半径为 2. 先对 $|x| < 2$ 求级数的和,然后再考虑端点 $x = \pm 2$ 的情况.

当 $x \in (-2, 2)$ 时,令 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdots (3n-2)}{3 \cdot 6 \cdots 3n} \left(\frac{x}{2} \right)^n$. 逐项微分之,得

$$f'(x) = \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdots (3n-2)}{3 \cdot 3 \cdot 6 \cdots (3n-3)} \left(\frac{x}{2} \right)^{n-1}.$$

以 $(1 - \frac{x}{2})$ 乘上式两端,得

$$\left(1 - \frac{x}{2} \right) f'(x) = \frac{1}{6} f(x) + \frac{1}{6}.$$

上述方程系一阶线性方程

$$f'(x) - \frac{1}{6 \left(1 - \frac{x}{2} \right)} f(x) = \frac{1}{6 \left(1 - \frac{x}{2} \right)}.$$

解之,得

$$f(x) = C \left(1 - \frac{x}{2} \right)^{-\frac{1}{3}} - 1 \quad (-2 < x < 2).$$

由于 $f(0) = 0$, 故得 $0 = C - 1$, 即 $C = 1$. 于是,当 $-2 < x < 2$ 时,有

$$f(x) = \left(1 - \frac{x}{2} \right)^{-\frac{1}{3}} - 1. \quad (1)$$

最后考虑端点 $x = \pm 2$ 的情况,先考虑 $x = 2$, 此时原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, 其中 $b_n = \frac{1 \cdot 4 \cdots (3n-2)}{3 \cdot 6 \cdots 3n}$ ($n = 1, 2, \dots$). 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{b_n}{b_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{3n+1} = \frac{2}{3} < 1.$$

故由拉比判别法知,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散.

再考虑 $x = -2$, 此时原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$. 由于 $\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{3n+3}{3n+1} > 1$, 故

$$b_n > b_{n+1} > 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (2)$$

另外,

$$\ln b_n = \sum_{k=1}^n \ln \frac{3k-2}{3k} = \sum_{k=1}^n \ln \left(1 - \frac{2}{3k}\right).$$

由于 $\ln(1 - \frac{2}{3k}) < 0$ ($k=1, 2, 3, \dots$), 且

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 - \frac{2}{3k})}{-\frac{2}{3k}} = 1,$$

而级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ 发散, 故级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1 - \frac{2}{3k})$ 发散, 并且 $\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1 - \frac{2}{3k}) = -\infty$. 于是, $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln b_n = -\infty$, 从而有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0. \quad (3)$$

由(2)式及(3)式, 根据莱布尼茨判别法知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ 收敛.

综上所述, 并利用幂级数的阿贝尔定理, 即知: 原幂级数的收敛域为 $-2 \leq x < 2$, 且在其上, 公式(1)成立.

利用逐项积分法求级数的和:

【3011】 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}.$

解题思路 易知级数的收敛域为 $(-1, 1)$. 当 $x \in (-1, 1)$ 时, 令 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$. 逐项积分之, 并利用 2911 题的结果, 可得

$$\int_0^x f(t) dt = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

于是, 当 $|x| < 1$ 时, $f(x) = \left[\frac{x}{(1-x)^2} \right]' = \frac{1+x}{(1-x)^3}.$

解 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$, 故收敛半径为 1. 当 $|x| = 1$ 时, 由于 $n^2 \rightarrow \infty$, 故级数发散. 因此, 级数的收敛域为 $(-1, 1)$.

当 $x \in (-1, 1)$ 时, 令 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$. 逐项积分之, 得

$$\int_0^x f(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x n^2 t^{n-1} dt = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

于是, 当 $|x| < 1$ 时, $f(x) = \left[\frac{x}{(1-x)^2} \right]' = \frac{1+x}{(1-x)^3}.$

*) 利用 2911 题的结果.

【3012】 $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^n.$

解题思路 易知级数的收敛域为 $(-1, 1)$. 当 $x \in (-1, 1)$ 时, 令

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^{n-1} = xg(x),$$

其中 $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^{n-1}$. 对后一级数逐项积分, 并利用 2911 题的结果, 可得

$$\int_0^x g(t) dt = \frac{3x-2x^2}{(1-x)^2}.$$

于是, 当 $|x| < 1$ 时, 有 $g(x) = \left[\frac{3x-2x^2}{(1-x)^2} \right]' = \frac{3-x}{(1-x)^3}.$

解 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+3)} = 1$, 故收敛半径为 1. 当 $|x| = 1$ 时, 由于 $n(n+2) \rightarrow \infty$, 故级数发散. 因此, 级数的收敛域为 $(-1, 1)$.

当 $x \in (-1, 1)$ 时, 令

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^{n-1} = xg(x),$$

其中 $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^{n-1}$. 由于

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_0^x g(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+2) \int_0^x t^{n-1} dt = \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)x^n = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n + 2 \sum_{n=1}^{\infty} x^n \\ &= \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{2x}{1-x} = \frac{3x-2x^2}{(1-x)^2}, \end{aligned}$$

故 $g(x) = [G(x)]' = \left[\frac{3x-2x^2}{(1-x)^2} \right]' = \frac{3-x}{(1-x)^3}$. 因此, 当 $|x| < 1$ 时, $f(x) = xg(x) = \frac{x(3-x)}{(1-x)^3}$.

*) 利用 2911 题的结果.

【3013】 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}$.

解题思路 易知级数的收敛域为 $(-\infty, +\infty)$. 下仿 3011 题的解法.

解 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{2n+3} = +\infty$, 故级数的收敛域为 $(-\infty, +\infty)$.

当 $x \in (-\infty, +\infty)$ 时, 令 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}$. 逐项积分之, 得

$$\int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x \frac{(2n+1)t^{2n}}{n!} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} = xe^{x^2}.$$

于是, 当 $|x| < +\infty$ 时, $f(x) = (xe^{x^2})' = e^{x^2}(1+2x^2)$.

注 本题也可直接求级数的和. 事实上,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)x^{2n}}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} \right] x^{2n} = 1 + 2x^2 e^{x^2} + (e^{x^2} - 1) = e^{x^2}(1+2x^2).$$

对于本题, 还可用逐项微分法求级数的和. 事实上,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(2n+1)}{(n-1)!} x^{2n-1} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[2(n-1)+1]+2}{(n-1)!} x^{2(n-1)+1} \\ &= 2x \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2m+1}{m!} x^{2m} + 4x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x^2)^k}{k!} = 2xf(x) + 4xe^{x^2}, \end{aligned}$$

解一阶线性微分方程 $f'(x) - 2xf(x) = 4xe^{x^2}$, 得 $f(x) = e^{x^2}(2x^2 + C)$. 由于 $f(0) = 1$, 故得 $1 = 1(2 \cdot 0 + C)$, 即 $C = 1$, 于是, 当 $x \in (-\infty, +\infty)$ 时, $f(x) = e^{x^2}(2x^2 + 1)$.

利用阿贝尔方法, 求下列级数的和:

【3014】 $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \dots$.

解题思路 易知级数 $x - \frac{x^4}{4} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^{10}}{10} + \dots$ 的收敛域为 $(-1, 1]$. 当 $|x| < 1$ 时, 令

$$f(x) = x - \frac{x^4}{4} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^{10}}{10} + \dots,$$

逐项微分之, 可得 $f'(x) = \frac{1}{1+x^3}$. 注意到 $f(0) = 0$, 并利用 1881 题的结果, 可得

$$f(x) = \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}}.$$

利用阿贝尔定理, 即易获解.

解 易知级数 $x - \frac{x^4}{4} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^{10}}{10} + \dots$ 的收敛域为 $(-1, 1]$. 当 $|x| < 1$ 时, 令

$$f(x) = x - \frac{x^4}{4} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^{10}}{10} + \dots$$

逐项微分之,得

$$f'(x) = 1 - x^3 + x^5 - x^7 + \cdots = \frac{1}{1+x^3}.$$

由于 $f(0)=0$, 故有

$$f(x) = \int_0^x f'(t) dt = \int_0^x \frac{dt}{1+t^3} = \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}} \quad (-1 < x < 1).$$

由阿贝尔定理, 即得 $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \cdots = \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = f(1) = \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$

*) 利用 1881 题的结果.

【3015】 $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots,$

提示 利用 2907 题的结果.

解 级数 $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$ 的收敛域为 $[-1, 1]$, 利用 2907 题的结果知, 当 $x \in (-1, 1)$ 时, 有

$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$. 由阿贝尔定理, 即得

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \lim_{x \rightarrow 1-0} \arctan x = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

【3016】 $1 - \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \cdots,$

提示 利用 2910 题的结果 (将其中的 x 换成 $-x$).

解 级数

$$1 - \frac{x}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^3 + \cdots$$

的收敛域为 $(-1, 1]$. 利用 2910 题的结果 (将 x 换成 $-x$) 或利用基本展开式 IV (其中 $m = -\frac{1}{2}$) 知, 当 $x \in$

$(-1, 1)$ 时, 有 $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \cdots$. 由阿贝尔定理, 即得

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \cdots = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

【3017】 $1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} + \cdots,$

提示 利用 2870 题的结果.

解 级数 $x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \cdots$ 的收敛域为 $[-1, 1]$. 利用 2870 题的结果知, 当 $x \in (-1, 1)$ 时,

有 $\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \cdots$. 由阿贝尔定理, 即得

$$1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} + \cdots = \lim_{x \rightarrow 1-0} \arcsin x = \frac{\pi}{2}.$$

求下列三角级数的和:

【3018】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}.$

解 注意到 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \ln \frac{1}{1-z}$, 其中 $z = e^{ix}$, 以及

$$\begin{aligned} \ln \frac{1}{1-z} &= -\ln(1 - \cos x - i \sin x) = -\frac{1}{2} \ln(2 - 2\cos x) + i \arctan \frac{\sin x}{1 - \cos x} \\ &= -\ln \left| 2 \sin \frac{x}{2} \right| + i \arctan \frac{\sin x}{1 - \cos x} \end{aligned} \quad (1)$$

及

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad (2)$$

比较(1),(2)两式实数部分及虚数部分,即得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} = -\ln \left| 2 \sin \frac{x}{2} \right| \quad (0 < x < 2\pi), \quad (3)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \arctan \frac{\sin x}{1 - \cos x} = \arctan \left(\cot \frac{x}{2} \right) = \arctan \left(\tan \frac{\pi - x}{2} \right) = \frac{\pi - x}{2} \quad (0 < x < 2\pi).$$

*) 其中用到 $\ln z = \ln(|z|e^{i\arg z}) = \ln|z| + i\arg z$. 若 $z = x + iy$, 则 $\ln|z| = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$, 而 $\arg z = \arctan \frac{y}{x}$.

【3019】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}.$

解 参看 3018 题中的结果(3).

【3020】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin na \sin nx}{n}.$

解 利用积化和差公式及 3019 题的结果,即得

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin na \sin nx}{n} &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n(x-a)}{n} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n(x+a)}{n} \\ &= -\frac{1}{2} \ln \left| 2 \sin \frac{x-a}{2} \right| + \frac{1}{2} \ln \left| 2 \sin \frac{x+a}{2} \right| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin \frac{x+a}{2}}{\sin \frac{x-a}{2}} \right|, \end{aligned}$$

上式的存在域为 $0 < x-a < 2\pi$ 及 $0 < x+a < 2\pi$ 的公共部分,可视 a 之正负号而定:当 $a > 0$ 时为 $a < x < 2\pi - a$; 当 $a < 0$ 时为 $-a < x < 2\pi + a$.

【3021】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 na \sin nx}{n} \quad (0 < a < \frac{\pi}{2}).$

解 利用半角公式、积化和差公式以及 3018 题的结果,即得

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 na \sin nx}{n} &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2na \sin nx}{n} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} - \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n(x+2a)}{n} - \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n(x-2a)}{n}. \end{aligned}$$

下面分三种情况求此级数的和 S :

(1) 取 $0 < x < 2\pi$, $0 < x-2a < 2\pi$ 与 $0 < x+2a < 2\pi$ 的公共部分,即 $2a < x < 2\pi - 2a$. 此时,级数的和为

$$S = \frac{\pi - x}{4} - \frac{\pi - (x+2a)}{8} - \frac{\pi - (x-2a)}{8} = 0.$$

(2) 当 $0 < x < 2a$ 时, $S = \frac{\pi - x}{4} - \frac{\pi - (x+2a)}{8} + \frac{\pi - (2a-x)}{8} = \frac{\pi}{4}.$

(3) 当 $2\pi - 2a < x < 2\pi$ 时, $S = \frac{\pi - x}{4} - \frac{\pi - (x+2a-2\pi)^{*-1}}{8} - \frac{\pi - (x-2a)}{8} = -\frac{\pi}{4}.$

*) 由于 $2\pi < x+2a < 3\pi$,故可令 $x+2a = 2\pi + \theta$ ($0 < \theta < \pi$),则有 $\sin n(x+2a) = \sin n(2\pi + \theta) = \sin n\theta$, 从而以 $\theta = x+2a-2\pi$ 代替 3018 题的结果中的 x 即可.

【3022】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.$

解 记 $I(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$, 利用 3018 题的结果,有

$$I(x) = (\operatorname{sgn} x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n|x|}{n} = (\operatorname{sgn} x) \frac{\pi - |x|}{2} \quad (|x| < 2\pi).$$

又记

$$I_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}, \quad I_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2kx}{2k},$$

则有

$$I_2(x) = (\operatorname{sgn} x) \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k(2|x|)}{k} = \frac{1}{2} (\operatorname{sgn} x) \frac{\pi - 2|x|}{2} \quad (|x| < \pi),$$

由 $I(x) = I_1(x) + I_2(x)$, 当 $|x| < \pi$ 时, 有

$$(\operatorname{sgn} x) \frac{\pi - |x|}{2} = I_1(x) + (\operatorname{sgn} x) \frac{\pi - 2|x|}{4}.$$

于是, 最后得 $I_1(x) = (\operatorname{sgn} x) \left(\frac{\pi - |x|}{2} - \frac{\pi - 2|x|}{4} \right) = \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} x \quad (|x| < \pi).$

【3023】 $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2 - 1}.$

解 首先仿照 3018 题的解法, 只要在公式 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \ln \frac{1}{1-z}$ 中令 $z = -e^{ix}$, 并注意幅角主值的取法, 就有

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n} = -\frac{x}{2} \quad (|x| < \pi) \quad (1)$$

及

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n} = -\ln \left(2 \cos \frac{x}{2} \right). \quad (2)$$

由于 $\frac{1}{n^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right)$, 故有

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2 - 1} &= \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n-1} - \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n+1} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{\cos(m+1)x}{m} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{\cos(m-1)x}{m} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m} [\cos(m-1)x - \cos(m+1)x] - \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cos x \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\cos x}{2} \right) + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m} \sin mx \sin x = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\cos x}{2} \right) - \frac{x}{2} \sin x \\ &\quad (|x| < \pi). \end{aligned}$$

【3024】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}.$

解 记 $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$, 显然级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$ 在 $-\infty < x < +\infty$ 上一致收敛, 故 $F(x)$ 是 $-\infty < x < +\infty$ 上的连续函数, 而且是以 2π 为周期的周期函数. 因此, 只要求 $F(x)$ 在 $|x| \leq \pi$ 上的值. 易知

$$2 \sin x \sum_{k=1}^n \sin(2k-1)x = 1 - \cos 2nx.$$

故当 $\tau \leq x \leq \pi - \tau$ ($0 < \tau < \frac{\pi}{2}$ 是任意的) 时, 有

$$\left| \sum_{k=1}^n \sin(2k-1)x \right| \leq \frac{1}{\sin \tau}.$$

于是, 根据狄利克雷判别法知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$ 在 $\tau \leq x \leq \pi - \tau$ 上一致收敛. 从而, 由逐项求导数法则知, 当 $\tau \leq x \leq \pi - \tau$ 时, 有

$$F'(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} = -\frac{\pi}{4}. \quad (1)$$

由 τ 的任意性知 (1) 式当 $0 < x < \pi$ 时成立. 于是,

$$F(x) = -\frac{\pi}{4}x + C \quad (0 < x < \pi), \quad (2)$$

其中 C 是某常数. 由 $F(x)$ 在 $x=0$ 的连续性以及

$$F(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}^{**}),$$

在(2)式中令 $x \rightarrow +0$ 取极限, 即得 $C = \frac{\pi^2}{8}$, 于是,

$$F(x) = -\frac{\pi}{4}x + \frac{\pi^2}{8} \quad (0 \leq x < \pi).$$

由此, 再注意到 $F(x)$ 是偶函数及连续函数, 得 $F(x) = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{4}|x| \quad (|x| \leq \pi)$.

*) 利用 3022 题的结果.

**) 利用 2961 题的结果.

$$\text{【3025】} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n(n+1)}.$$

解 由于 $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, 故得

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n(n+1)} &= -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n+1} \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n} - \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{\sin(m-1)x}{m} \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n} - \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{\sin mx}{m} \cos x + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{\cos mx}{m} \sin x \\ &= -(1+\cos x) \left(-\frac{x}{2}\right) - \sin x \ln \left(2 \cos \frac{x}{2}\right)^{*}) \\ &= \frac{x}{2}(1+\cos x) - \sin x \ln \left(2 \cos \frac{x}{2}\right) \quad (|x| < \pi). \end{aligned}$$

*) 利用解 3023 题的(1)、(2)两式的结果.

$$\text{【3026】} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!}.$$

解 令 $z = e^{ix}$, 考虑级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$. 注意到

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!}, \quad e^z = e^{\cos x + i \sin x} = e^{\cos x} [\cos(\sin x) + i \sin(\sin x)],$$

故按实部和虚部分别各自相等的关系, 即得 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!} = e^{\cos x} \cos(\sin x) \quad (|x| < +\infty)$.

$$\text{【3027】} \quad \text{画出曲线} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \cdot \sin ny}{n^2} = 0.$$

解 记

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \sin ny}{n^2},$$

注意到 $f(x, y)$ 对 x, y 分别均为以 2π 为周期的周期函数, 故可考虑下列定义域:

$$R = \{0 \leq x < 2\pi, 0 \leq y < 2\pi\},$$

为研究 $f(x, y) = 0$ 的图像, 要用到下列函数:

$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nt}{n^2} \quad (|t| < +\infty).$$

为求 $g(t)$, 考虑 $g'(t)$, 仿 3024 题的办法可知可逐项求导数, 再注意到 3022 题求解过程中的关系, 有

$$g'(t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n} = -(\operatorname{sgn} t) \frac{\pi - |t|}{2} \quad (0 < |t| < 2\pi).$$

注意常数 $g(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, 于是, 得

$$g(t) = g(0) + \int_0^t g'(t) dt = g(0) - \frac{\pi}{2}|t| + \frac{1}{4}t^2.$$

由于 $\sin nx \sin ny = \frac{1}{2} [\cos n(x-y) - \cos n(x+y)]$, 故得

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n(x-y) - \cos n(x+y)}{n^2} = \frac{1}{2} [g(x-y) - g(x+y)] \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left[g(0) - \frac{\pi}{2}|x-y| + \frac{1}{4}(x-y)^2 \right] - \left[g(0) - \frac{\pi}{2}|x+y| + \frac{1}{4}(x+y)^2 \right] \right\} \\ &= \frac{\pi}{4} (|x+y| - |x-y|) + \frac{1}{8} [(x-y)^2 - (x+y)^2] \\ &= \frac{\pi}{4} \cdot 2\min\{x, y\} + \frac{1}{8} (-4xy) \\ &= \frac{1}{2} [\pi - \max\{x, y\}] \min\{x, y\}. \end{aligned}$$

若 $x \leq y$, 则令 $f(x, y) = 0$, $(x, y) \in R$, 有 $x(\pi - y) = 0$, 得 $x = 0$ 或 $y = \pi$. 若 $x \geq y$, 则令 $f(x, y) = 0$, $(x, y) \in R$, 有 $y(\pi - x) = 0$, 得 $y = 0$ 或 $x = \pi$. 因此, 在 R 内, $x = 0$, $x = \pi$; $y = 0$, $y = \pi$ 诸直线是满足 $f(x, y) = 0$ 的图像.

又根据 $f(x, y)$ 的表达式知, 图像必然是按 x 及按 y 以 2π 为周期的周期曲线, 故得

$$x = l\pi, l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad y = m\pi, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

诸直线均为 $f(x, y) = 0$ 的图像, 且除此而外, 均有 $f(x, y) \neq 0$, 即不是 $f(x, y) = 0$ 的图像. 因此, $f(x, y) = 0$ 的图像即为上述所指的两族直线组. 由于这是两族分别与坐标轴平行且相距为 π 的直线族, 它们的图像已为大家所熟知, 故省略.

求下列级数的和:

【3028】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} (2x)^{2n}.$

解 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n!)^2}{(2n+2)!} (2x)^{2n+2}}{\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} (2x)^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 x^2}{(2n+2)(2n+1)} = x^2,$$

故原幂级数当 $|x| < 1$ 时收敛, 当 $|x| > 1$ 时发散, 即其收敛区间为 $(-1, 1)$. 当 $|x| = 1$, 原级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2 4^n}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

由于

$$n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \frac{3n+1}{2n} \rightarrow \frac{3}{2} > 1 \quad (n \rightarrow \infty),$$

故由拉比判别法知, 当 $|x| = 1$ 时原幂级数也收敛. 因此, 原幂级数当 $-1 \leq x \leq 1$ 时一致收敛. 从而, 其和函数 $f(x)$ 是 $-1 \leq x \leq 1$ 上的连续函数, 且在 $-1 < x < 1$ 内可逐项微分, 得

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} 4n(2x)^{2n-1} \quad (-1 < x < 1), \\ f''(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} 8n(2n-1)(2x)^{2n-2} \quad (-1 < x < 1), \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} & -xf'(x) + (1-x^2)f''(x) \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} 2n(2x)^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} 8n(2n-1)(2x)^{2n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} 2n(2n-1)(2x)^{2n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} 4n^2 (2x)^{2n} + 4 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} 8n(2n-1)(2x)^{2n-2} \\
&= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} 4n^2 (2x)^{2n} + 4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n+2)!} 8(n+1)(2n+1)(2x)^{2n} = 4 \quad (-1 < x < 1).
\end{aligned}$$

因此,

$$-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} f'(x) + \sqrt{1-x^2} f''(x) = \frac{4}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1),$$

两端积分,得

$$\sqrt{1-x^2} f'(x) = 4 \arcsin x + C \quad (-1 < x < 1).$$

由 $f'(0)=0$, 得 $C=0$, 从而,

$$f'(x) = \frac{4 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1).$$

两端再积分,得

$$f(x) = 2(\arcsin x)^2 + C_1 \quad (-1 < x < 1).$$

再由 $f(0)=0$, 得 $C_1=0$. 于是,有

$$f(x) = 2(\arcsin x)^2 \quad (-1 < x < 1).$$

再注意到上式两端都是 $-1 \leq x \leq 1$ 上的连续函数, 通过取极限, 即知上式当 $x=1$ 和 $x=-1$ 时也成立, 故最后得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} (2x)^{2n} = 2(\arcsin x)^2 \quad (-1 \leq x \leq 1).$$

【3029】 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n.$

解 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{[(n+1)!]^2}{(2n+2)!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{4},$$

故原幂级数的收敛半径等于 4, 即它当 $|x| < 4$ 时收敛, 当 $|x| > 4$ 时发散. 当 $x = \pm 4$ 时, 原幂级数为

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} (\pm 4)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n. \quad (1)$$

由于 $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{2n+2}{2n+1} > 1$, 故 $|a_{n+1}| > |a_n|$ ($n=0, 1, \dots$), 因此, a_n 不趋于零, 从而, 级数(1)发散. 于是, 原幂级数仅当 $|x| < 4$ 时收敛, 下面分两种情形讨论:

当 $0 \leq x < 4$ 时, 令 $x = (2t)^2$, $0 \leq t < 1$, 则

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} (2t)^{2n} = F(t) \quad (0 \leq t < 1).$$

由直接计算, 易知

$$(1-t^2)F(t) - 1 = \frac{t}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} 4n(2t)^{2n-1} \quad (0 \leq t < 1).$$

利用 3028 题的结果, 得

$$(1-t^2)F(t) - 1 = \frac{t}{4} [2(\arcsin t)^2]' = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \arcsin t \quad (0 \leq t < 1),$$

从而,

$$F(t) = \frac{1}{1-t^2} \left(1 + \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \arcsin t \right) \quad (0 \leq t < 1).$$

将 $t = \frac{\sqrt{x}}{2}$ 代入, 即得 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n = \frac{4}{4-x} + \frac{4\sqrt{x}}{(4-x)^{\frac{3}{2}}} \arcsin \frac{\sqrt{x}}{2} \quad (0 \leq x < 4).$

现设 $-4 < x < 0$. 令 $x = -(2t)^2$, $0 < t < 1$. 于是,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} (-1)^n (2t)^{2n} = G(t) \quad (0 < t < 1).$$

由直接计算可知

$$1 - (1+t^2)G(t) = t \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} n(2t)^{2n-1} = t \cdot g(t) \quad (0 < t < 1),$$

其中

$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} n(2t)^{2n-1}. \quad (2)$$

易知(2)式右端幂级数的收敛半径等于 1. 于是, 当 $|t| < 1$ 时可逐项微分, 得

$$g'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} 2n(2n-1)(2t)^{2n-2}.$$

由直接计算可知

$$\begin{aligned} & (1+t^2)g'(t) + t \cdot g(t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} \cdot 2n(2n-1)(2t)^{2n-2} \\ & \quad + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} \cdot \frac{1}{2} n(2n-1)(2t)^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} \cdot \frac{n}{2} (2t)^{2n} \\ &= 1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} 2n(2n-1)(2t)^{2n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} n^2 (2t)^{2n} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n+2)!} 2(n+1)(2n+1)(2t)^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} n^2 (2t)^{2n} \\ &= 1 \quad (-1 < t < 1), \end{aligned}$$

即

$$\sqrt{1+t^2} g'(t) + \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} g(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \quad (-1 < t < 1).$$

两端积分, 得

$$\sqrt{1+t^2} g(t) = \ln(t + \sqrt{1+t^2}) + C \quad (-1 < t < 1).$$

由 $g(0)=0$, 得 $C=0$, 故

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \ln(t + \sqrt{1+t^2}) \quad (-1 < t < 1).$$

于是, 根据关系式

$$G(t) = \frac{1}{1+t^2} [1 - t \cdot g(t)] \quad (0 < t < 1),$$

再将 $t = \frac{\sqrt{-x}}{2} = \frac{\sqrt{|x|}}{2}$ 代入, 得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n = \frac{4}{4-x} - \frac{4\sqrt{|x|}}{(4-x)^{\frac{3}{2}}} \ln\left(\frac{\sqrt{|x|} + \sqrt{4-x}}{2}\right) \quad (-4 < x < 0).$$

【3030】 $\frac{1!}{x+1} + \frac{2!}{(x+1)(x+2)} + \frac{3!}{(x+1)(x+2)(x+3)} + \dots$

解 显然, 要使本题有意义, 首先要假定 x 不是负整数, 记

$$s_n = \frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

为研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty} s_n$ 的收敛性及其和, 注意当 $x \neq 1$ 时, 有关系式

$$\frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x+1} \left(1 + \frac{2}{x-1}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1} \cdot \frac{2}{x-1} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1} \cdot \frac{2}{x+2} \left(\frac{x+2}{x-1} \right) \\
&= \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1} \cdot \frac{2}{x+2} + \frac{1}{x+1} \cdot \frac{2}{x+2} \cdot \frac{3}{x-1} \\
&= \frac{1!}{x+1} + \frac{2!}{(x+1)(x+2)} + \frac{3!}{(x+1)(x+2)(x+3)} + \frac{3!}{(x+1)(x+2)(x+3)} \cdot \frac{4}{x-1} \\
&= \dots \\
&= \frac{1!}{x+1} + \frac{2!}{(x+1)(x+2)} + \frac{3!}{(x+1)(x+2)(x+3)} + \dots + \frac{n!}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)} \\
&\quad + \frac{n!}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)} \cdot \frac{n+1}{x-1} \\
&= s_1 + s_2 + \dots + s_n + R_n,
\end{aligned} \tag{1}$$

其中

$$R_n = s_n \cdot \frac{n+1}{x-1} = \frac{1}{x-1} \prod_{k=1}^n \frac{k+1}{x+k} = \frac{1}{x-1} \prod_{k=1}^n \frac{1+\frac{1}{k}}{1+\frac{x}{k}} = \frac{1}{x-1} \prod_{k=1}^n (1+\alpha_k),$$

这里(当 k 充分大时)

$$\alpha_k = \frac{1+\frac{1}{k}}{1+\frac{x}{k}} - 1 = \left(1+\frac{1}{k}\right) \left(1+\frac{x}{k}\right)^{-1} - 1 = \frac{1-x}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right). \tag{2}$$

由(1)式知,为研究 $\sum_{n=1}^{\infty} s_n$,就是要研究 R_n 有无极限.若 R_n 有极限为 τ ,则由(1)得

$$\sum_{k=1}^{\infty} s_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n s_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x-1} - R_n \right) = \frac{1}{x-1} - \tau.$$

令 $u_n = \prod_{k=1}^n (1+\alpha_k)$. 分两种情形讨论:

若 $x > 1$, 这时 $0 < 1+\alpha_k = \frac{k+1}{x+k} < 1$ ($k=1, 2, \dots$). 于是,

$$\ln u_n = \sum_{k=1}^n \ln(1+\alpha_k), \quad \ln(1+\alpha_k) < 0, \quad \alpha_k < 0, \quad (k=1, 2, 3, \dots), \quad \alpha_k \rightarrow 0. \tag{3}$$

由(2)式与(3)式并注意到 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ 收敛, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ 发散知: $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ 发散且 $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = -\infty$. 于是,根据 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+\alpha_k)}{\alpha_k} = 1$

即知,级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1+\alpha_k)$ 发散且 $\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1+\alpha_k) = -\infty$. 由此知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln u_n = -\infty$, 从而, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, 于是, $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$,

故 $\sum_{k=1}^{\infty} s_k = \frac{1}{x-1}$.

若 $x < 1$. 注意,已设 x 不是负整数. 另外,当 $x=0$ 时原级数为 $\sum_{k=1}^{\infty} 1$, 显然发散,故可设 $-m < x < -m+1$, 其中 m 是某非负整数. 于是,

$$1+\alpha_k = \frac{k+1}{x+k} < 0 \quad (k=1, 2, \dots, m-1),$$

$$1+\alpha_k = \frac{k+1}{x+k} > 0 \quad (k=m, m+1, \dots).$$

令 $v_n = \prod_{k=m}^n (1+\alpha_k)$ ($n=m, m+1, \dots$), 则

$$\ln v_n = \sum_{k=m}^n \ln(1+\alpha_k) \quad (n=m, m+1, \dots).$$

根据(2)式知,当 k 充分大时 $a_k > 0$ 并且级数 $\sum_{k=m}^n a_k$ 发散. 仿照前面的论述可知,级数 $\sum_{k=m}^{\infty} \ln(1+a_k)$ 发散,且

$\sum_{k=m}^{\infty} \ln(1+a_k) = +\infty$. 从而,当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\ln v_n \rightarrow +\infty$, $v_n \rightarrow +\infty$. 由此可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \pm \infty,$$

其中的正负号随 m 是 $2, 4, 6, \dots$ 之一或 $0, 1, 3, 5, \dots$ 之一而定. 由此可知,此时 $\sum_{k=1}^{\infty} s_n$ 发散.

另外,若 $x=1$,原级数为 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1}$,显然发散.

综上所述,可知原级数仅当 $x > 1$ 时收敛,且此时有 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} = \frac{1}{x-1}$.

【3031】 $\frac{a_1}{a_2+x} + \frac{a_1}{a_2+x} \cdot \frac{a_2}{a_3+x} + \dots$ 在 $x > 0, a_n > 0 (n=1, 2, \dots)$, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ 发散的条件下.

解 记

$$s_n = \frac{a_1}{a_2+x} \cdot \frac{a_2}{a_3+x} \cdots \frac{a_n}{a_{n+1}+x} \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

注意条件 $x > 0, a_n > 0$, 我们有

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{x} &= \frac{a_1}{a_2+x} \cdot \frac{a_2+x}{x} = \frac{a_1}{a_2+x} + \frac{a_1}{a_2+x} \cdot \frac{a_2}{x} \\ &= \frac{a_1}{a_2+x} + \frac{a_1}{a_2+x} \cdot \frac{a_2}{a_3+x} + \frac{a_1}{a_2+x} \cdot \frac{a_2}{a_3+x} \cdot \frac{a_3}{x} \\ &= \dots \\ &= \frac{a_1}{a_2+x} + \frac{a_1}{a_2+x} \cdot \frac{a_2}{a_3+x} + \dots + \frac{a_1}{a_2+x} \cdot \frac{a_2}{a_3+x} \cdots \frac{a_{n-1}}{a_n+x} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}+x} + \frac{a_1}{a_2+x} \cdot \frac{a_2}{a_3+x} \cdots \\ &\quad \cdot \frac{a_{n-1}}{a_n+x} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}+x} \cdot \frac{a_{n+1}}{x} \\ &= s_1 + s_2 + \dots + s_n + R_n, \end{aligned} \quad (1)$$

其中

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{a_{n+1}}{x} s_n = \frac{a_1}{x} \cdot \frac{a_2}{a_2+x} \cdot \frac{a_3}{a_3+x} \cdots \frac{a_n}{a_n+x} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_{n+1}+x} = \frac{a_1}{x} \prod_{k=2}^{n+1} \frac{a_k}{a_k+x} = \frac{a_1}{x} \prod_{k=2}^{n+1} \left(1 - \frac{x}{a_k+x}\right) \\ &= \frac{a_1}{x} \prod_{k=2}^{n+1} (1 + a_k), \end{aligned} \quad (2)$$

这里

$$a_k = -\frac{x}{a_k+x} \quad (k=2, 3, \dots, n+1). \quad (3)$$

由(1)知,为研究原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} s_n$, 就是要研究 R_n 有无极限. 若 R_n 有极限 τ , 则由(1)得

$$\sum_{k=1}^{\infty} s_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n s_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_1}{x} - R_n \right) = \frac{a_1}{x} - \tau. \quad (4)$$

下面我们证明 R_n 有极限 $\tau=0$. 显然

$$-1 < a_k < 0, \quad 0 < 1 + a_k < 1 \quad (k=2, 3, \dots).$$

令 $u_n = \prod_{k=2}^{n+1} (1 + a_k)$, 则 $\ln u_n = \sum_{k=2}^{n+1} \ln(1 + a_k)$. 易知正项级数 $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{a_k+x}$ 是发散的. 事实上, 由 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k}$ 的发散性, 可将 a_k 分为以下情况来讨论: 1) 若 $a_k \geq x (k=2, 3, \dots)$, 则

$$a_k + x \leq 2a_k \quad \text{即} \quad \frac{1}{a_k+x} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a_k}.$$

由 $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{a_k}$ 发散(无界)便知 $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{a_k+x}$ 发散. 2) 若除有限个 a_k 之外均有 $a_k \geq x (k$ 取除了某些有限个正整数以

外的所有正整数), 则仍有上述结论. 3) 若存在一个数列 a_{k_i} 使得 $a_{k_i} < x$ ($i=1, 2, 3, \dots$), 则我们有

$$a_{k_i} + x < 2x \quad \text{即} \quad \frac{1}{a_{k_i} + x} > \frac{1}{2x} \quad (i=1, 2, \dots).$$

显然, 有

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{a_{k_i} + x} > \frac{N}{2x} \rightarrow \infty \quad (\text{当 } N \rightarrow \infty),$$

于是, 级数 $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{a_k + x}$ 发散. 从而,

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{a_k + x} = +\infty, \quad \sum_{k=2}^{\infty} a_k = -\infty.$$

注意到 $-1 < a_k < 0$, $\ln(1+a_k) < a_k < 0$ ($k=2, 3, \dots$), 可知

$$\sum_{k=2}^{\infty} \ln(1+a_k) = -\infty.$$

由此可知, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\ln u_n \rightarrow -\infty$, $u_n \rightarrow 0$, $R_n \rightarrow 0$, 即 $\tau=0$. 于是, 原级数收敛, 且

$$\frac{a_1}{a_2+x} + \frac{a_1}{a_2+x} \cdot \frac{a_2}{a_3+x} + \dots = \frac{a_1}{x}.$$

【3032】 $\frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^4} + \frac{x^4}{1-x^8} + \dots$, 若 (1) $|x| < 1$; (2) $|x| > 1$.

解 记

$$s_n = \frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}} \quad (n=0, 1, 2, \dots; |x| \neq 1).$$

注意, 当 $|x| \neq 1$ 时, 有公式

$$\begin{aligned} \frac{x}{1-x} &= \frac{x}{1-x^2} (1+x) = \frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^2} = \frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^4} (1+x^2) \\ &= \frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^4} + \frac{x^4}{1-x^4} = \dots = \frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^4} + \dots + \frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}} + \frac{x^{2^{n+1}}}{1-x^{2^{n+1}}} \\ &= s_1 + s_2 + \dots + s_n + R_n, \end{aligned}$$

其中 $R_n = \frac{x^{2^{n+1}}}{1-x^{2^{n+1}}}$. 上述恒等式对任何 n 均成立. 为求 $\sum_{n=1}^{\infty} s_n$, 我们分两种情况予以处理:

(1) 当 $|x| < 1$ 时, $R_n = \frac{|x|^{2^{n+1}}}{1-|x|^{2^{n+1}}} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). 于是, 得

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N s_k = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1-x} - R_N \right) = \frac{x}{1-x}.$$

(2) 当 $|x| > 1$ 时, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{|x|} \right)^{2^{n+1}} = 0$ 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{|x|^{2^{n+1}}}{1-|x|^{2^{n+1}}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\left(\frac{1}{|x|} \right)^{2^{n+1}} - 1} \right\} = -1.$$

从而得 $\sum_{n=1}^{\infty} s_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N s_k = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1-x} - R_N \right) = \frac{x}{1-x} + 1 = \frac{1}{1-x}.$

*) 本题第三项前原题为减号, 应为加号.

【3033】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}$, 若 (1) $|x| < 1$; (2) $|x| > 1$.

解 记 $s_n = \frac{x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}$ ($n=1, 2, \dots; |x| \neq 1$).

注意到

$$\frac{1}{1-x^n} - \frac{1}{1-x^{n+1}} = \frac{x^n(1-x)}{(1-x^n)(1-x^{n+1})} = \frac{1-x}{x} \cdot \frac{x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})} = \frac{1-x}{x} s_n \quad (n=1, 2, \dots),$$

即得

$$\sum_{k=1}^N \frac{1-x}{x} s_k = \sum_{k=1}^N \frac{1}{1-x^k} - \sum_{k=1}^N \frac{1}{1-x^{k+1}} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^{N+1}},$$

或有

$$\sum_{k=1}^N s_k = \frac{x}{(1-x)^2} - \frac{x}{1-x} \frac{1}{1-x^{N+1}}.$$

于是, (1) 当 $|x| < 1$ 时,

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N s_k = \frac{x}{(1-x)^2} - \frac{x}{1-x} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{1-x^{N+1}} = \frac{x}{(1-x)^2} - \frac{x}{1-x} = \frac{x^2}{(1-x)^2}.$$

(2) 当 $|x| > 1$ 时,

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N s_k = \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{x}{1-x} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{N+1}-1} = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

§ 8. 利用级数求定积分

利用被积函数的级数展开式计算下列积分:

【3034】 $\int_0^1 \ln \frac{1}{1-x} dx.$

解题思路 利用 2549 题的结果, 但必须注意, 由于幂级数(收敛半径为 1)

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots$$

当 $x=1$ 时发散, 故它在 $0 \leq x \leq 1$ 上逐项积分的合理性要给出证明, 详见本题的证明.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int_0^1 \ln \frac{1}{1-x} dx &= - \int_0^1 \ln(1-x) dx = - \int_0^1 \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots \right) dx \\ &= \int_0^1 x dx + \int_0^1 \frac{x^2}{2} dx + \int_0^1 \frac{x^3}{3} dx + \dots \\ &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots = 1. \end{aligned}$$

*) 由于幂级数(收敛半径为 1) $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots$ 当 $x=1$ 时发散, 故它在 $0 \leq x \leq 1$ 上逐项积分的合理性要单独证明, 今证如下:

对任何 $0 < r < 1$, 有

$$\int_0^r \ln(1-x) dx = \int_0^r \left(-x - \frac{x^2}{2} - \dots - \frac{x^n}{n} \right) dx + R_n, \quad (1)$$

其中

$$R_n = \int_0^r \left(-\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+2}}{n+2} - \dots \right) dx.$$

由于 $0 < r < 1$, 故可在 $0 \leq x \leq r$ 上逐项积分, 得

$$\begin{aligned} 0 > R_n &= - \left[\frac{r^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \frac{r^{n+3}}{(n+2)(n+3)} + \dots \right] > - \left[\frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots \right] \\ &= - \left[\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) + \dots \right] = -\frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

于是, 由(1)式知

$$\left| \int_0^r \ln(1-x) dx - \left(-\frac{r^2}{1 \cdot 2} - \frac{r^3}{2 \cdot 3} - \dots - \frac{r^{n+1}}{n(n+1)} \right) \right| < \frac{1}{n+1}. \quad (2)$$

在(2)式中让 n 固定而令 $r \rightarrow 1-0$ 取极限(注意, 瑕积分 $\int_0^1 \ln(1-x) dx$ 显然收敛), 得

$$\left| \int_0^1 \ln(1-x) dx - \left(-\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} - \cdots - \frac{1}{n(n+1)} \right) \right| < \frac{1}{n+1} \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

由此式即知

$$\int_0^1 \ln(1-x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} - \cdots - \frac{1}{n(n+1)} \right) = -\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} - \cdots,$$

也即

$$\int_0^1 \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots \right) dx = \int_0^1 (-x) dx + \int_0^1 \left(-\frac{x^2}{2} \right) dx + \int_0^1 \left(-\frac{x^3}{3} \right) dx + \cdots,$$

换句话说, 逐项积分公式成立.

本节以下诸题中, 凡在端点发散的级数的逐项积分的合理性问题, 都可仿照上面类似地去证明, 不再一一写出.

* *) 利用 2549 题的结果.

$$\text{【3035】} \int_0^1 \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{x} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int_0^1 \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{x} dx &= \int_0^1 \frac{x + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right\}}{x} dx \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{1}{(2n+1)^2}. \end{aligned}$$

*) 利用 2871 题的结果.

$$\text{【3036】} \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx.$$

$$\text{解} \quad \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \int_0^1 \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots}{x} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \cdots \right) dx = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \cdots = \frac{\pi^2}{12}.$$

*) 利用 2961 题的结果.

$$\text{【3037】} \int_0^1 x^{p-1} \ln(1-x^q) dx \quad (p>0, q>0).$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int_0^1 x^{p-1} \ln(1-x^q) dx &= \int_0^1 x^{p-1} \left(-x^q - \frac{x^{2q}}{2} - \frac{x^{3q}}{3} - \cdots \right) dx \\ &= - \int_0^1 \left(x^{p+q-1} + \frac{1}{2} x^{p+2q-1} + \frac{1}{3} x^{p+3q-1} + \cdots \right) dx = - \left(\frac{1}{p+q} + \frac{1}{p+2q} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{p+3q} \cdot \frac{1}{3} + \cdots \right) \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(p+nq)}. \end{aligned}$$

$$\text{【3038】} \int_0^1 \ln x \cdot \ln(1-x) dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int_0^1 \ln x \cdot \ln(1-x) dx &= - \int_0^1 \left(\ln x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \right) dx \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} \ln x \Big|_0^1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)^2} \Big|_0^1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \\ &= 1 - \left(\frac{\pi^2}{6} - 1 \right) = 2 - \frac{\pi^2}{6}. \end{aligned}$$

*) 利用 2549 题及 2961 题的结果.

$$\text{【3039】} \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{e^{2\pi x} - 1}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{e^{2\pi x} - 1} &= \int_0^{+\infty} \frac{x e^{-2\pi x}}{1 - e^{-2\pi x}} dx = \int_0^{+\infty} x e^{-2\pi x} (1 + e^{-2\pi x} + e^{-4\pi x} + \cdots) dx \\ &= \left[-\frac{x}{2\pi} e^{-2\pi x} - \frac{1}{(2\pi)^2} e^{-2\pi x} \right]_0^{+\infty} + \left[-\frac{x}{4\pi} e^{-4\pi x} - \frac{1}{(4\pi)^2} e^{-4\pi x} \right]_0^{+\infty} + \left[-\frac{x}{6\pi} e^{-6\pi x} - \frac{1}{(6\pi)^2} e^{-6\pi x} \right]_0^{+\infty} + \cdots \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots \right) = \frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{24}.$$

*) 利用 2961 题的结果.

【3040】 $\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{e^x + 1}.$

解 $\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{e^x + 1} = \int_0^{+\infty} \frac{x e^{-x} dx}{1 + e^{-x}} = \int_0^{+\infty} x e^{-x} (1 - e^{-x} + e^{-2x} - \dots) dx$
 $= \left[-x e^{-x} - e^{-x} \right]_0^{+\infty} - \left[-\frac{1}{2} x e^{-2x} - \frac{1}{2^2} e^{-2x} \right]_0^{+\infty} + \left[-\frac{1}{3} x e^{-3x} - \frac{1}{3^2} e^{-3x} \right]_0^{+\infty} - \dots$
 $= 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \dots = \frac{\pi^2}{12}.$

*) 利用 2961 题的结果.

【3041】 按模数 $k (0 \leq k < 1)$ 的正整数次幂展开第一类完全椭圆积分 $F(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}.$

解 $F(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$
 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{1}{2} k^2 \sin^2 \varphi + \frac{3}{8} k^4 \sin^4 \varphi + \frac{5}{16} k^6 \sin^6 \varphi + \dots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n} \sin^{2n} \varphi + \dots \right) d\varphi$
 $= \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 k^{2n} \right\}.$

*) 利用 2281 题的结果.

【3042】 按模数 $k (0 \leq k < 1)$ 的正整数次幂展开第二类完全椭圆积分 $E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi.$

解 $E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$
 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} k^{2n} \sin^{2n} \varphi \right\} d\varphi = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 \frac{k^{2n}}{2n-1} \right\}.$

*) 利用 2281 题的结果.

【3043】 利用按椭圆离心率的正整数次幂展开的级数表示椭圆 $x = a \cos t, y = b \sin t (0 \leq t \leq 2\pi)$ 的弧长.

解 设 $a > b$, 则 $\epsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}, \left(\frac{b}{a}\right)^2 = 1 - \epsilon^2$. 弧长为

$$s = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \epsilon^2 \cos^2 t} dt$$

$$= 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} \epsilon^{2n} \cos^{2n} t \right\} dt = 4a \cdot \frac{\pi}{2} \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 \frac{\epsilon^{2n}}{2n-1} \right\}$$

$$= 2\pi a \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \epsilon^2 - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \cdot \frac{\epsilon^4}{3} - \dots \right\}.$$

证明下列等式:

【3044】 $\int_0^1 \frac{dx}{x^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}.$

解 $\int_0^1 \frac{dx}{x^x} = \int_0^1 e^{-x \ln x} dx = \int_0^1 \left(1 - x \ln x + \frac{1}{2!} x^2 \ln^2 x - \frac{1}{3!} x^3 \ln^3 x + \dots \right) dx$
 $= \left[x - \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{2! \cdot 3} \ln^2 x - \frac{x^3}{3^2} \ln x + \frac{x^3}{3^3} - \frac{x^4}{3! \cdot 4} \ln^3 x + \frac{x^4}{2 \cdot 4^2} \ln^2 x - \frac{x^4}{4^3} \ln x + \frac{x^4}{4^4} + \dots \right]_0^1$
 $= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n},$

本题得证.

$$\text{【3045】} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \sin ax dx = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{(2n+1)!} a^{2n+1}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \sin ax dx &= \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a^{2n+1}}{(2n+1)!} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} x^{2n+1} dx = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a^{2n+1}}{(2n+1)!} \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a^{2n+1}}{(2n+1)!} e^{-t} \left[t^n + nt^{n-1} + n(n-1)t^{n-2} + \cdots + n!t + n! \right] \Big|_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{(2n+1)!} a^{2n+1}. \end{aligned}$$

本题得证.

$$\text{【3046】} \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cos(\sin x) \cos nx dx = \frac{\pi}{n!} \quad (n=0, 1, 2, \cdots).$$

解 若复数 $w=u+iv$, 记 $\operatorname{Re}\{w\}=u$ 为其实部, 则有 $\operatorname{Re}\{e^{ix}\}=e^{\cos x} \cos(\sin x)$. 因此, 原定积分为

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cos(\sin x) \cos nx dx \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{2\pi} e^{ix} \cos nx dx \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{2\pi} e^{ix} \cdot \frac{1}{2} (e^{inx} + e^{-inx}) dx \right\} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(e^{ix})^m}{m!} (e^{inx} + e^{-inx}) dx \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_{m_1=0}^{\infty} \frac{1}{m_1!} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{2\pi} e^{i(m_1+n)x} dx \right\} + \sum_{m_2=0}^{\infty} \frac{1}{m_2!} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{2\pi} e^{i(m_2-n)x} dx \right\} \right]. \end{aligned}$$

注意, 对任意整数 k , 有积分关系:

$$\int_0^{2\pi} e^{ikx} dx = \begin{cases} 2\pi, & k=0, \\ 0, & k \neq 0. \end{cases}$$

从而, 当 $n \geq 0, m \geq 0$ 时, 有:

(1) 当 $n=0$ 时,

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m+n)x} dx = \begin{cases} 2\pi, & m=0, \\ 0, & m \neq 0, \end{cases} \quad \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)x} dx = \begin{cases} 2\pi, & m=n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

此时相应地得 $I_0 = \frac{1}{2} (2\pi + 2\pi) = 2\pi$.

(2) 当 $n=1, 2, 3, \cdots$ 时,

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)x} dx = 0; \quad \int_0^{2\pi} e^{i(m+n)x} dx = \begin{cases} 2\pi, & m=n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

此时相应地得 $I_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{n!} 2\pi \right) = \frac{\pi}{n!}$.

求:

$$\text{【3047】} \int_0^{2\pi} e^{a \cos x} \cos(asin x - nx) dx \quad (n \text{ 是正整数}).$$

解 被积函数正是 $e^{ae^{ix} - inx}$ 的实部, 故积分为

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} e^{a \cos x} \cos(asin x - nx) dx = \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\{e^{ae^{ix} - inx}\} dx \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{2\pi} e^{ae^{ix}} e^{-inx} dx \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ae^{ix})^m}{m!} e^{-inx} dx \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{m!} \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)x} dx \right\} \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{a^n}{n!} \cdot 2\pi + \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq n}}^{\infty} \frac{a^m}{m!} \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)x} dx \right\} = \frac{2\pi a^n}{n!}. \end{aligned}$$

【3048】 $\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1-2a \cos x + a^2} dx.$

提示 利用 2864 题的结果.

解 利用 2864 题的结果, 即得

$$\frac{x \sin x}{1-2a \cos x + a^2} = \sum_{n=1}^{\infty} a^n x \sin nx \quad (|a| < 1).$$

由于 $\int_0^\pi x \sin nx dx = (-1)^{n-1} \frac{\pi}{n}$, 所以, 当 $|a| < 1$ 时, 就有

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x dx}{1-2a \cos x + a^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a^n \frac{\pi}{n} = \pi \ln(1+a).$$

当 $|a| > 1$ 时, $\left| \frac{1}{a} \right| < 1$,

$$\frac{x \sin x}{1-2a \cos x + a^2} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{x \sin x}{1-2\left(\frac{1}{a}\right) \cos x + \left(\frac{1}{a}\right)^2}.$$

利用以上结果, 即得: 当 $|a| > 1$ 时, $\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1-2a \cos x + a^2} dx = \frac{\pi}{a^2} \ln\left(1 + \frac{1}{a}\right).$

【3049】 $\int_0^\pi \ln(1-2a \cos x + a^2) dx.$

提示 利用 2872 题的结果.

解 利用 2872 题的结果, 即得: 当 $|a| \leq 1$ 时,

$$\int_0^\pi \ln(1-2a \cos x + a^2) dx = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\pi \frac{a^n \cos nx}{n} dx = 0.$$

当 $|a| > 1$ 时, 即当 $\left| \frac{1}{a} \right| < 1$ 时,

$$\ln(1-2a \cos x + a^2) = \ln\left[a^2 \left(1-2\frac{1}{a} \cos x + \frac{1}{a^2}\right)\right] = \ln a^2 + \ln\left(1-2\frac{1}{a} \cos x + \frac{1}{a^2}\right).$$

利用以上结果, 即得: 当 $|a| > 1$ 时 $\int_0^\pi \ln(1-2a \cos x + a^2) dx = \pi \ln a^2 = 2\pi \ln |a|.$

【3050】 证明公式:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{a+x} dx = \frac{1}{a} - \frac{1!}{a^2} + \frac{2!}{a^3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{a^n} + (-1)^n \frac{\theta_n n!}{a^{n+1}}, \quad (1)$$

其中 $a > 0$ 且 $0 < \theta_n < 1$.

若于公式(1)中取两项来表示积分 $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{100+x} dx$, 其精确程度如何?

解 当 $x \geq 0$ 时, 考虑函数 $f(x) = \frac{1}{x+a}$ 在 $x=0$ 点的 n 阶泰勒展式, 有

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x+a} = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^n(\theta x)}{n!}x^n \\ &= \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{a^n} + (-1)^n \frac{1}{(a+\theta x)^{n+1}} x^n \\ &= \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{a^n} + (-1)^n \frac{x^n}{a^{n+1}} \cdot \frac{1}{\left(1+\theta \cdot \frac{x}{a}\right)^{n+1}} \\ &= \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{a^n} + (-1)^n \bar{\theta}_n(x) \frac{x^n}{a^{n+1}}, \end{aligned}$$

其中 $0 < \theta < 1$, 而对于函数 $\bar{\theta}_n(x) = \frac{1}{\left(1+\theta \frac{x}{a}\right)^{n+1}}$, 也有 $0 < \bar{\theta}_n(x) < 1$ ($0 < x < +\infty$). 由

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} x^n dx = n! \quad (n=0, 1, 2, \cdots) \quad \text{以及} \quad 0 < \int_0^{+\infty} e^{-x} \bar{\theta}_n(x) x^n dx < \int_0^{+\infty} e^{-x} x^n dx = n!,$$

即知 $\int_0^{+\infty} e^{-x} \bar{\theta}_n(x) x^n dx = \theta_n n!$, 其中 $0 < \theta_n < 1$. 于是,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{a+x} dx &= \int_0^{+\infty} f(x) e^{-x} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{a^k} \int_0^{+\infty} x^{k-1} e^{-x} dx + (-1)^n \frac{1}{a^{n+1}} \int_0^{+\infty} \theta_n(x) x^n e^{-x} dx \\ &= \frac{1}{a} - \frac{1!}{a^2} + \frac{2!}{a^3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{a^n} + (-1)^n \frac{n!}{a^{n+1}} \theta_n. \end{aligned}$$

公式证毕.

在上述公式中, 令 $a=100=10^2$, 则有

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{100+x} dx = 10^{-2} - 1!10^{-4} + 2!10^{-6} - \cdots + (-1)^{n-1} (n-1)!10^{-2n} + (-1)^n \theta_n n!10^{-2n-2} \quad (0 < \theta_n < 1).$$

如果取前两项来表示积分, 即在上式中取 $n=2$, 则误差为 $(-1)^2 \theta_2 2!10^{-6}$, 其绝对值小于 $2 \cdot 10^{-6}$, 于是,

$$\left| \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{100+x} dx - 0.01 + 0.0001 \right| \leq 0.000002 = 2 \cdot 10^{-6}.$$

§ 9. 无穷乘积

1° 无穷乘积的收敛性 若存在有限而且异于零的极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n p_i = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P,$$

则称无穷乘积

$$p_1 p_2 \cdots p_n \cdots = \prod_{n=1}^{\infty} p_n \quad (1)$$

是收敛的.

若 $P=0$ 而乘数 p_n 中无一为零, 则称乘积(1)发散于零; 在相反的情形下, 则称无穷乘积收敛于零. 乘积(1)的收敛性与级数

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \ln p_n \quad (2)$$

的收敛性是一样的.

收敛性的必要条件为: $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 1$.

若 $p_n = 1 + a_n (n=1, 2, \cdots)$ 及 a_n 不变号, 则乘积(1)收敛的充分必要条件为级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (p_n - 1) \quad (3)$$

收敛.

在一般的情形下, 当 a_n 不保持固定的符号而级数(3)收敛时, 乘积(1)与级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (p_n - 1)^2$$

同时收敛或同时发散, 且在发散的情形下, 乘积发散于零.

2° 绝对收敛性 若级数(2)绝对收敛或条件收敛, 则称乘积(1)为绝对收敛或条件(非绝对)收敛. 级数(3)绝对收敛是乘积(1)绝对收敛的充分必要条件.

3° 函数的无穷乘积展开 当 $-\infty < x < +\infty$ 时有展开式

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2} \right), \quad \cos x = \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \frac{4x^2}{(2n-1)^2 \pi^2} \right].$$

特别是, 由第一式当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时得沃利斯公式

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \right).$$

证明下列等式:

【3051】 $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) = \frac{1}{2}.$

证 记 $p_n = 1 - \frac{1}{n^2}$. 由于部分乘积

$$P_n = \prod_{i=2}^n p_i = \left(1 - \frac{1}{2^2} \right) \left(1 - \frac{1}{3^2} \right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} \rightarrow \frac{1}{2} \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时}),$$

故 $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) = \frac{1}{2}.$

【3052】 $\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3-1}{n^3+1} = \frac{2}{3}.$

证 记 $p_n = \frac{n^3-1}{n^3+1}$. 由于部分乘积

$$P_n = \prod_{i=2}^n p_i = \frac{2^3-1}{2^3+1} \cdot \frac{3^3-1}{3^3+1} \cdots \frac{n^3-1}{n^3+1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{n^2+n+1}{n(n+1)} \rightarrow \frac{2}{3} \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时}),$$

故 $\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3-1}{n^3+1} = \frac{2}{3}.$

【3053】 $\prod_{n=2}^{\infty} \left[1 - \frac{2}{n(n+1)} \right] = \frac{1}{3}.$

证 记 $p_n = 1 - \frac{2}{n(n+1)}$. 由于部分乘积

$$P_n = \prod_{i=2}^n p_i = \frac{4 \cdot 1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{5 \cdot 2}{3 \cdot 4} \cdots \frac{(n+2)(n-1)}{n(n+1)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{n+2}{n} \rightarrow \frac{1}{3} \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时}),$$

故 $\prod_{n=2}^{\infty} \left[1 - \frac{2}{n(n+1)} \right] = \frac{1}{3}.$

【3054】 $\prod_{n=0}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{1}{2} \right)^{2^n} \right] = 2.$

证 由于部分乘积满足下述等式:

$$\left(1 - \frac{1}{2} \right) P_n = \left(1 - \frac{1}{2} \right) \left(1 + \frac{1}{2} \right) \left(1 + \frac{1}{2^2} \right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^{2^n}} \right) = 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{2^{n+1}}$$

从而, $P_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} \rightarrow \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时}),$ 故 $\prod_{n=0}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{1}{2} \right)^{2^n} \right] = 2.$

【3055】 $\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{2}{\pi}.$

证 由于部分乘积

$$P_n = \cos \frac{\pi}{2^2} \cos \frac{\pi}{2^3} \cdots \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{2^{n+1}}} \cos \frac{\pi}{2^2} \cos \frac{\pi}{2^3} \cdots \left(\cos \frac{\pi}{2^{n+1}} \cdot 2 \sin \frac{\pi}{2^{n+1}} \right) = \cdots$$

$$= \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{2^n \sin \frac{\pi}{2^{n+1}}} = \frac{\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin \frac{\pi}{2^{n+1}}} \cdot \frac{2}{\pi} \rightarrow \frac{2}{\pi} \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时}),$$

故 $\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{2}{\pi}.$

【3056】 $\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{x}.$

证 当 $x \neq 0$ 时, 由于部分乘积

$$P_n = \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cdots \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} = \frac{\frac{x}{2^n}}{\sin \frac{x}{2^n}} \cdot \frac{\sin x}{x} \rightarrow \frac{\sin x}{x} \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时}),$$

故 $\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{x}.$

【3057】 $\prod_{n=1}^{\infty} \operatorname{ch} \frac{x}{2^n} = \frac{\operatorname{sh} x}{x}.$

证 由于部分乘积

$$P_n = \operatorname{ch} \frac{x}{2} \operatorname{ch} \frac{x}{2^2} \cdots \operatorname{ch} \frac{x}{2^n} = \frac{\operatorname{sh} x}{2^n \operatorname{sh} \frac{x}{2^n}} = \frac{\operatorname{sh} x}{x} \cdot \frac{\frac{x}{2^n}}{\operatorname{sh} \frac{x}{2^n}} \quad (x \neq 0) \quad \text{及} \quad \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\operatorname{sh} y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\operatorname{ch} y} = 1,$$

故 $\prod_{n=1}^{\infty} \operatorname{ch} \frac{x}{2^n} = \frac{\operatorname{sh} x}{x}.$

【3058】 $\prod_{n=0}^{\infty} (1+x^{2^n}) = \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1).$

证 由于 $(1-x)P_n = (1-x)(1+x)\cdots(1+x^{2^n}) = 1-x^{2^{n+1}}$, 从而(注意 $|x| < 1$),

$$P_n = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x} \rightarrow \frac{1}{1-x} \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时}),$$

故 $\prod_{n=0}^{\infty} (1+x^{2^n}) = \frac{1}{1-x}$. 利用此题的结果, 易得

$$\prod_{n=0}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{1}{2} \right)^{2^n} \right] = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2,$$

此即 3054 题的结果.

【3059】 $\frac{\pi}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \cdots.$

提示 在 3056 题中, 令 $x = \frac{\pi}{2}$, 并利用半角公式即易获解.

证 在 3056 题中, 令 $x = \frac{\pi}{2}$, 利用半角公式, 有

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}, \quad \dots$$

则得

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdots,$$

也即 $\frac{\pi}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \cdots.$

【3060】 $\prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{3n-1} \cdot \frac{3n}{3n+1} \right) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$

提示 在 $\sin x$ 的无穷乘积展开中, 令 $x = \frac{\pi}{3}$, 即易获解..

证 利用函数 $\sin x$ 的无穷乘积展开 $\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2} \right)$, 令 $x = \frac{\pi}{3}$, 有

$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(3n)^2} \right) = \frac{\pi}{3} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-1)(3n+1)}{(3n)^2}.$$

于是,得 $\prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{3n-1} \cdot \frac{3n}{3n+1} \right) = \frac{\frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

试证下列无穷乘积的收敛性并求出其值:

【3061】 $\prod_{n=3}^{\infty} \frac{n^2-4}{n^2-1}$.

证 由于部分乘积

$$P_n = \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 4} \cdot \frac{2 \cdot 6}{3 \cdot 5} \cdot \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 6} \cdots \frac{(n-4)n}{(n-3)(n-1)} \cdot \frac{(n-3)(n+1)}{(n-2)n} \cdot \frac{(n-2)(n+2)}{(n-1)(n+1)} = \frac{n+2}{4(n-1)} \rightarrow \frac{1}{4}$$

(当 $n \rightarrow \infty$ 时),

故无穷乘积 $\prod_{n=3}^{\infty} \frac{n^2-4}{n^2-1}$ 收敛,且其值为 $\frac{1}{4}$.

【3062】 $\prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{1}{n(n+2)} \right]$.

证 $1 + \frac{1}{n(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$. 由于部分乘积

$$P_n = \frac{2^2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{3^2}{2 \cdot 4} \cdot \frac{4^2}{3 \cdot 5} \cdots \frac{(n-1)^2}{(n-2)n} \cdot \frac{n^2}{(n-1)(n+1)} \cdot \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = \frac{2(n+1)}{n+2} \rightarrow 2$$

(当 $n \rightarrow \infty$ 时),

故无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{1}{n(n+2)} \right]$ 收敛,且其值为 2.

【3063】 $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)(2n+7)}{(2n+3)(2n+5)}$.

证 由于部分乘积

$$P_n = \frac{3 \cdot 9}{5 \cdot 7} \cdot \frac{5 \cdot 11}{7 \cdot 9} \cdot \frac{7 \cdot 13}{9 \cdot 11} \cdots \frac{(2n-3)(2n+3)}{(2n-1)(2n+1)} \cdot \frac{(2n-1)(2n+5)}{(2n+1)(2n+3)} \cdot \frac{(2n+1)(2n+7)}{(2n+3)(2n+5)}$$

$$= \frac{3}{7} \cdot \frac{2n+7}{2n+3} \rightarrow \frac{3}{7}$$

(当 $n \rightarrow \infty$ 时),

故无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)(2n+7)}{(2n+3)(2n+5)}$ 收敛,且其值为 $\frac{3}{7}$.

【3064】 $\prod_{n=1}^{\infty} a^{\frac{(-1)^n}{n}}$ ($a > 0$).

证 由于部分乘积

$$P_n = a^{-1} \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdots a^{\frac{(-1)^n}{n}} = a^{-\left[1 - \frac{1}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}\right]} \rightarrow a^{-\ln 2}$$

(当 $n \rightarrow \infty$ 时),

故无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} a^{\frac{(-1)^n}{n}}$ 收敛,且其值为 $a^{-\ln 2}$.

【3065】 可否由乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 与 $\prod_{n=1}^{\infty} q_n$ 的收敛性得出下列乘积:

(1) $\prod_{n=1}^{\infty} (p_n + q_n)$; (2) $\prod_{n=1}^{\infty} p_n^2$; (3) $\prod_{n=1}^{\infty} p_n q_n$; (4) $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{q_n}$.

的收敛性?

提示 (1) 不可以,例如,乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{n^2})$ 及 $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n^2})$.

(2) 可以,且其值为 P^2 ($P \neq 0$),其中 $P = \prod_{n=1}^{\infty} p_n$.

(3) 可以,且其值为 PQ ($P \neq 0, Q \neq 0$),其中 $P = \prod_{n=1}^{\infty} p_n, Q = \prod_{n=1}^{\infty} q_n$.

(4) 可以,且其值为 $\frac{P}{Q}$ ($P \neq 0, Q \neq 0$),其中 $P = \prod_{n=1}^{\infty} p_n, Q = \prod_{n=1}^{\infty} q_n$.

解 (1) 不可以, 例如, 乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{n^2})$ 及 $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n^2})$ 均收敛, 但乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} [(1 - \frac{1}{n^2}) + (1 + \frac{1}{n^2})] = \prod_{n=1}^{\infty} (2 + \frac{2}{n^2})$ 却发散.

(2) 可以. 事实上, 部分乘积 $Q_n = p_1^2 \cdot p_2^2 \cdots p_n^2 = (p_1 p_2 \cdots p_n)^2$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限存在且为 P^2 , 故 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n^2$ 收敛, 且其值为 P^2 , 其中 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n = P \neq 0$.

(3) 可以. 事实上, 部分乘积 $Q_n = (p_1 p_2 \cdots p_n)(q_1 q_2 \cdots q_n)$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限存在且为 PQ , 故 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n q_n$ 收敛, 且其值为 PQ , 其中 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n = P \neq 0$, $\prod_{n=1}^{\infty} q_n = Q \neq 0$.

(4) 可以. 事实上, 部分乘积 $Q_n = \frac{p_1 p_2 \cdots p_n}{q_1 q_2 \cdots q_n}$ ($q_i \neq 0, i = 1, 2, \dots$), 当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限存在且为 $\frac{P}{Q}$, 故 $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{q_n}$ 收敛, 且其值为 $\frac{P}{Q}$, 其中 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n = P \neq 0$, $\prod_{n=1}^{\infty} q_n = Q \neq 0$.

研究下列无穷乘积的收敛性:

【3066】 $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

解 由于通项 $p_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时), 不满足收敛的必要条件 ($p_n \rightarrow 1$); 或者说: 由于部分乘积

$$p_n = \frac{1}{n!} \rightarrow 0 \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时}),$$

且每项不为零, 故无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散于零.

【3067】 $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$.

解 注意通项 $p_n = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = 1 + \frac{1}{n(n+2)}$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ 收敛, 且 $\frac{1}{n(n+2)}$ 不变号, 故无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$ 收敛. 事实上, 已由 3062 题知, 该无穷乘积是收敛的, 且其值为 2.

【3068】 $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n^p})$.

提示 注意 $\frac{1}{n^p}$ 不变号以及级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 的敛散性.

解 $p_n = 1 + \frac{1}{n^p}$, 其中 $\frac{1}{n^p}$ 不变号. 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 当 $p > 1$ 时收敛, 而当 $p \leq 1$ 时发散, 故无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n^p})$ 当 $p > 1$ 时收敛, 而当 $p \leq 1$ 时发散.

【3069】 $\prod_{n=2}^{\infty} (1 - \frac{1}{n})$.

解 由于 $p_n - 1 = -\frac{1}{n}$ 不变号, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{n})$ 发散, 故原无穷乘积发散. 或由于部分乘积

$$P_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限为零, 且乘积中无一项为零, 故原乘积发散于零.

【3070】 $\prod_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2+1} \right)^p$.

解 通项 $p_n = \left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^p = \left(1 - \frac{2}{n^2+1}\right)^p$. 由于级数

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{2}{n^2+1}\right)^p = p \sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{2}{n^2+1}\right)$$

对任何 p 均收敛 (因为级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2+1}$ 收敛), 故原无穷乘积对任何 p 均收敛.

*) 原题误为 $\prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^p$, 这时, 若 $p \geq 0$, 第一个因子为零, 按定义无穷乘积收敛于零; 若 $p < 0$, 第一个因子无意义, 因此整个无穷乘积无意义.

【3071】 $\prod_{n=n_0}^{\infty} \frac{n^2+a_1n+b_1}{n^2+an+b}$, 其中当 $n \geq n_0$ 时 $n^2+an+b > 0$.

解 通项 $p_n = \frac{n^2+a_1n+b_1}{n^2+an+b} = 1 + \frac{(a_1-a)n+(b_1-b)}{n^2+an+b}$, 令

$$a_n = \frac{(a_1-a)n+(b_1-b)}{n^2+an+b}.$$

当 $a_1 = a$ 时, $a_n \sim \frac{1}{n^2}$, 由于 $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故原无穷乘积收敛. 当 $a_1 \neq a$ 时, 由于 $n^2+an+b > 0$, 且 $a_n \sim \frac{a_1-a}{n}$,

故 $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ 发散, 从而, 原无穷乘积也发散.

【3072】 $\prod_{n=n_0}^{\infty} \frac{(n-a_1)(n-a_2)\cdots(n-a_p)}{(n-b_1)(n-b_2)\cdots(n-b_p)}$, 其中 $n_0 > b_i (i=1, 2, \dots, p)$.

解 $p_n = \frac{(n-a_1)(n-a_2)\cdots(n-a_p)}{(n-b_1)(n-b_2)\cdots(n-b_p)} = 1 + \frac{(\sum_{i=1}^p b_i - \sum_{i=1}^p a_i)n^{p-1} + \cdots + (-1)^p (\prod_{i=1}^p a_i - \prod_{i=1}^p b_i)}{\prod_{i=1}^p (n-b_i)}$.

令

$$a_n = \frac{(\sum_{i=1}^p b_i - \sum_{i=1}^p a_i)n^{p-1} + \cdots + (-1)^p (\prod_{i=1}^p a_i - \prod_{i=1}^p b_i)}{\prod_{i=1}^p (n-b_i)},$$

当 $\sum_{i=1}^p a_i = \sum_{i=1}^p b_i$ 时, $a_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, 故 $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ 收敛, 从而, 原无穷乘积收敛. 当 $\sum_{i=1}^p a_i \neq \sum_{i=1}^p b_i$ 时, 由于当

$n > n_0$ 时, $\prod_{i=1}^p (n-b_i) > 0$, 且 $a_n \sim \frac{1}{n} (\sum_{i=1}^p b_i - \sum_{i=1}^p a_i)$, 故级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ 发散, 从而, 原无穷乘积也发散.

【3073】 $\prod_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n+2}}$.

解 $p_n = \sqrt{\frac{n+1}{n+2}}$, $\ln p_n = \frac{1}{2} \ln \frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{2} \ln\left(1 - \frac{1}{n+2}\right)$.

由于 $\sum_{n=0}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n+2}\right)$ 发散 (于 $-\infty$), 故原无穷乘积发散 (于零).

【3074】 $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$.

提示 注意级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ 的敛散性.

解 $p_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$, $\ln p_n = -\frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$.

考虑级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n^2}\right).$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ 收敛, 从而, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$ 收敛. 因此, 无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ 收敛.

【3075】 $\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{n}}.$

解 $p_n = \sqrt[n]{1 + \frac{1}{n}}, \ln p_n = \frac{1}{n} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) > 0$. 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\frac{1}{n} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n^2},$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$ 收敛, 从而, 原乘积也收敛.

【3076】 $\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n^2]{n}.$

解 $p_n = \sqrt[n^2]{n}, \ln p_n = \frac{1}{n^2} \ln n$. 考虑级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \ln n.$$

由于 $\frac{1}{n^2} \ln n = O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right)$, 此处 ε 为满足 $0 < \varepsilon < 1$ 的任一常数, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$ 收敛, 故原无穷乘积收敛.

【3077】 $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}}.$

解 通项

$$p_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}} = \left(1 + \frac{x}{n}\right) \left[1 - \frac{x}{n} + \frac{x^2}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] = 1 - \frac{x^2}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

故若记 $p_n = 1 + a_n$, 则当 n 充分大时, 有

$$a_n = -\frac{x^2}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) < 0,$$

保持不变号. 注意到对任何 x , 级数

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \left[-\frac{x^2}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

收敛, 这里 n_0 为适当的某一正整数. 从而, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 因此, 原无穷乘积收敛.

【3078】 $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{c+n}\right) e^{-\frac{x}{c+n}},$ 其中 $c > 0$.

解 对任意 x , 考虑通项

$$\begin{aligned} p_n &= \left(1 - \frac{x}{c+n}\right) e^{-\frac{x}{c+n}} = \left(1 - \frac{x}{c+n}\right) \left[1 + \frac{x}{c+n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] = 1 - \frac{x}{c+n} + \frac{x}{c+n} - \frac{x^2}{n(c+n)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= 1 - \frac{x^2 - cx}{n(c+n)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

易知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$ 收敛, 故原无穷乘积收敛.

【3079】 $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n).$

解 当 $|x| \geq 1$ 时, 由于通项 $p_n = 1 - x^n \not\rightarrow 1$, 即不满足收敛的必要条件, 故原无穷级数发散. 当 $|x| < 1$

时,若 $x=0$ 显然收敛;若 $x \neq 0$ 则有

$$\ln p_n = \ln(1-x^n) = -x^n \ln[(1-x^n)^{-\frac{1}{x^n}}].$$

由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln[(1-x^n)^{-\frac{1}{x^n}}] = \lim_{y \rightarrow \infty} \ln\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right] = 1,$$

从而, $\ln p_n = O(|x|^n)$. 但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |x|^n$ 当 $|x| < 1$ 时收敛,故此时原无穷乘积收敛.

【3080】 $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^n}{2^n}\right).$

解 当 $|x| \geq 2$ 时,通项 $p_n = 1 + \left(\frac{x}{2}\right)^n \nrightarrow 1$,故原无穷乘积发散. 当 $|x| < 2$ 时,若 $x=0$ 显然收敛;若 $x \neq 0$,利用

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x^n}{2^n}\right)^{\frac{2^n}{x^n}} = \lim_{y_n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y_n}\right)^{y_n} = e,$$

就有

$$\ln p_n = \ln\left(1 + \frac{x^n}{2^n}\right) = \frac{x^n}{2^n} \ln\left(1 + \frac{x^n}{2^n}\right)^{\frac{2^n}{x^n}} = O\left(\left|\frac{x}{2}\right|^n\right).$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{x}{2}\right|^n$ 当 $|x| < 2$ 时收敛,从而, $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$ 收敛. 因此,原无穷乘积收敛.

【3081】 $\prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}}{x^n}\right].$

解 (1) 当 $|x| < e$ 时,利用

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e + o(1) \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时}),$$

存在适当的整数 n_0 , 当 $n \geq n_0$ 时,有 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > |x|$, 于是,相应地得

$$\left|\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}}{x^n}\right| = \left[\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{|x|}\right]^n > 1.$$

这表明,此时

$$p_n = 1 + \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}}{x^n} \nrightarrow 1 \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时}),$$

即不满足无穷乘积收敛的必要条件,故原无穷乘积发散.

(2) 当 $|x| = e$ 时,利用 70 题的结果,有 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > e - \frac{3}{n}$. 此时,得

$$p_n = 1 + (\operatorname{sgn} x)^n \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}}{e^n} = 1 + (\operatorname{sgn} x)^n \left[\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{e}\right]^n = 1 + a_n.$$

但

$$|a_n| = \left|(\operatorname{sgn} x)^n \left[\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{e}\right]^n\right| = \left[\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{e}\right]^n > \left[\frac{e - \frac{3}{n}}{e}\right]^n = \left(1 - \frac{3}{e} \cdot \frac{1}{n}\right)^n,$$

而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{e} \cdot \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{3}{ne}\right)^{\frac{ne}{3}}\right]^{\frac{3}{e}} = e^{-\frac{3}{e}} > 0,$$

故此时有 $a_n \rightarrow 0$, 也即 $p_n \rightarrow 1$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时), 从而, 原无穷乘积发散.

(3) 当 $|x| > e$ 时, 记 $p_n = 1 + a_n$. 为考察 a_n 的变化, 仍利用

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e + o(1) \quad (n \rightarrow \infty),$$

存在适当大正整数 n_0 , 当 $n \geq n_0$ 时, 有

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{1}{2}(e + |x|).$$

记 $q = \frac{1}{2} \cdot \frac{|x| + e}{|x|}$, 则 $0 < q < 1$, 有

$$|a_n| = \left[\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}}{x^n} \right] = \left[\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{|x|} \right]^n < \left[\frac{\frac{1}{2}(e + |x|)}{|x|} \right]^n = q^n.$$

于是, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛. 由 $\ln p_n = \ln(1 + a_n)$, 从而, $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$ 绝对收敛. 因此, 原无穷乘积收敛.

【3082】 $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{n}}\right) e^{\frac{x}{\sqrt{n}} - \frac{x^2}{2n}}.$

解 对于任意 x , 考虑通项

$$\begin{aligned} p_n &= \left(1 - \frac{x}{\sqrt{n}}\right) e^{\frac{x}{\sqrt{n}} - \frac{x^2}{2n}} \\ &= \left(1 - \frac{x}{\sqrt{n}}\right) \left[1 + \left(\frac{x}{\sqrt{n}} + \frac{x^2}{2n}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\sqrt{n}} + \frac{x^2}{2n}\right)^2 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right)\right] \\ &= \left[1 + \frac{x}{\sqrt{n}} + \frac{x^2}{2n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{n} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right)\right] + \left[-\frac{x}{\sqrt{n}} - \frac{x^2}{n} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right)\right] = 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right). \end{aligned}$$

因此, 若记 $p_n = 1 + a_n$, 则有 $a_n = O\left(\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right)$. 于是, 由级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的绝对收敛, 可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + a_n)$ 绝对收敛, 从而知, 原无穷乘积收敛.

【3083】⁺ $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^n}{n^p}\right) \cos \frac{x^n}{n^q}.$

解 (1) 当 $|x| < 1$ 时, 通项

$$\begin{aligned} p_n &= \left(1 + \frac{x^n}{n^p}\right) \cos \frac{x^n}{n^q} = \left(1 + \frac{x^n}{n^p}\right) \left[1 + O\left(\frac{x^{2n}}{n^{2q}}\right)\right] = 1 + \frac{x^n}{n^p} + O\left(\frac{x^{2n}}{n^{2q}}\right) + O\left(\frac{x^{3n}}{n^{p+2q}}\right) \\ &= 1 + O\left(\frac{x^n}{n^p}\right) + O\left(\frac{x^{3n}}{n^{p+2q}}\right). \end{aligned}$$

当 n 充分大时, 不论 p, q 为何值, 均有

$$\frac{x^n}{n^p} = O\left(|x|^{\frac{n}{2}}\right), \quad \frac{x^{3n}}{n^{p+2q}} = O\left(|x|^{\frac{n}{2}}\right).$$

于是, 可写 $p_n = 1 + a_n$, $a_n = O\left(|x|^{\frac{n}{2}}\right)$. 因此, 有

$$|\ln p_n| = |\ln(1 + a_n)| = O(|a_n|) = O\left(|x|^{\frac{n}{2}}\right).$$

由于当 $|x| < 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{|x|})^n < +\infty$, 从而, $\sum \ln p_n$ 绝对收敛, 故原无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 收敛.

(2) 当 $x = 1$ 时, 在 $p > 1, q > \frac{1}{2}$ 的情况下, 由于通项

$$\begin{aligned} p_n &= \left(1 + \frac{1}{n^p}\right) \cos \frac{1}{n^q} = \left(1 + \frac{1}{n^p}\right) \left[1 - \frac{1}{2n^{2q}} + O\left(\frac{1}{n^{4q}}\right)\right] = 1 + \frac{1}{n^p} - \frac{1}{2n^{2q}} + O\left(\frac{1}{n^{4q}}\right) + O\left(\frac{1}{n^{p+4q}}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{n^p} + O\left(\frac{1}{n^{2q}}\right), \end{aligned}$$

若记 $p_n = 1 + a_n$, $a_n = \frac{1}{n^p} + O\left(\frac{1}{n^{2q}}\right)$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 且由

$$a_n^2 = \frac{1}{n^{2p}} + O\left(\frac{1}{n^{4q}}\right) + O\left(\frac{1}{n^{2q+p}}\right) = \frac{1}{n^{2p}} + O\left(\frac{1}{n^{4q}}\right),$$

易知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 也收敛, 故此时无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 收敛.

(3) 当 $x = -1$ 时, 在 $p > \frac{1}{2}, q > \frac{1}{2}$ 的情况下, 由于通项

$$\begin{aligned} p_n &= \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^p}\right) \cos \frac{(-1)^n}{n^q} = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^p}\right) \left[1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^{2q}} + O\left(\frac{1}{n^{4q}}\right)\right] \\ &= 1 + \frac{(-1)^n}{n^p} - \frac{1}{2n^{2q}} + O\left(\frac{1}{n^{p+2q}}\right) + O\left(\frac{1}{n^{p+4q}}\right) = 1 + \frac{(-1)^n}{n^p} + O\left(\frac{1}{n^{2q}}\right), \end{aligned}$$

可记 $p_n = 1 + \beta_n$, $\beta_n = \frac{(-1)^n}{n^p} + O\left(\frac{1}{n^{2q}}\right)$, 则有

$$\ln p_n = \ln(1 + \beta_n) = \beta_n + O(\beta_n^2),$$

易见 $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ 收敛, 而

$$\beta_n^2 = \frac{1}{n^{2p}} + O\left(\frac{1}{n^{4q}}\right) + O\left(\frac{1}{n^{2q+p}}\right) = \frac{1}{n^{2p}} + O\left(\frac{1}{n^{2q}}\right),$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^2$ 绝对收敛, 从而知, $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$ 收敛. 于是, 此时无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 收敛.

【3084】 $\prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin \frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\right)^p.$

解 显然应当要求 $x \neq 0$. 记通项为 $p_n = (1 + a_n)^p$, 其中

$$a_n = \frac{\sin \frac{x}{n}}{\frac{x}{n}} - 1 = \left[1 - \frac{x^2}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] - 1 = -\frac{x^2}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (n \rightarrow \infty),$$

而 $\ln p_n = p \ln(1 + a_n) = p \ln \left[1 - \frac{x^2}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right].$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + a_n)$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$ 收敛, 从而, 原无穷乘积收敛 (对任何的 p 及 $x \neq 0$).

*) 参看 2677 题的结果.

【3085】 $\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\ln(n+x) - \ln n}.$

解 记 $p_n = \sqrt[n]{\ln(n+x) - \ln n}$, 由要求 $\ln(n+x) - \ln n \geq 0$, 知 $x \geq 0$.

(1) 当 $x = 0$ 时, 显然各项均为零, 无穷乘积收敛于零.

(2) 当 $x > 0$ 时, 由 $\ln p_n = \frac{1}{n} \ln \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right)$ 可知, 当 $n \geq \frac{x}{e-1}$ 时, 有 $\ln \left(1 + \frac{x}{n}\right) \leq 1$, 故此时 $\ln \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right) \leq 0$. 再由

$$\frac{-\frac{1}{n} \ln \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \ln \frac{1}{\ln \left(1 + \frac{x}{n}\right)} \rightarrow +\infty$$

及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n} \ln \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right)$ 发散, 从而得知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$ 发散. 因此, 原无穷乘积发散.

【3086】 证明: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ 收敛, 则乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} \cos x_n$ 收敛.

证 当 $x \rightarrow 0$ 时, $p_n = \cos x_n = 1 + a_n$, 其中

$$a_n = -\frac{1}{2} x_n^2 + o(x_n^2), a_n \leq 0,$$

且由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{x_n^2}{2} + o(x_n^2) \right]$ 收敛, 故无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} \cos x_n$ 收敛.

【3087】 证明: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 则乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} \tan\left(\frac{\pi}{4} + a_n\right)$ ($|a_n| < \frac{\pi}{4}$) 收敛.

证 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. 此时有

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{\pi}{4} + a_n\right) &= \frac{1 + \tan a_n}{1 - \tan a_n} = (1 + \tan a_n)(1 + \tan a_n + \tan^2 a_n + \cdots) \\ &= 1 + 2\tan a_n + 2\tan^2 a_n + \cdots = 1 + 2a_n + o(a_n). \end{aligned}$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} [2a_n + o(a_n)]$ 收敛, 而且级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} [2a_n + o(a_n)]^2 = \sum_{n=1}^{\infty} 4a_n^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot o(a_n)] + \sum_{n=1}^{\infty} o^2(a_n)$$

也收敛^{*)}, 故无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} \tan\left(\frac{\pi}{4} + a_n\right)$ ($|a_n| < \frac{\pi}{2}$) 收敛.

*) 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| \cdot |a_n|)$, 因而, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 也收敛. 又当 n 充分大时, 有 $|a_n \cdot o(a_n)| \leq |a_n|$, $|o^2(a_n)| \leq |a_n|$,

故 $\sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot o(a_n)]$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} o^2(a_n)$ 均收敛.

研究下列无穷乘积的绝对收敛性和条件收敛性:

【3088】 $\prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right]$.

解 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 条件收敛, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n+1}}{n} \right]^2$ 收敛, 故原无穷乘积条件收敛.

【3089】 $\prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} \right]$.

解 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ 条件收敛, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} \right]^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 故原无穷乘积发散.

【3090】 $\prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n^p} \right]$.

提示 就 $p > 1$, $\frac{1}{2} < p \leq 1$, $0 < p \leq \frac{1}{2}$ 及 $p \leq 0$ 四种情况加以讨论.

解 当 $p > 1$ 时, 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ 绝对收敛, 故原无穷乘积绝对收敛.

当 $\frac{1}{2} < p \leq 1$ 时, 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ 条件收敛及 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n+1}}{n^p} \right]^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}}$ 收敛, 故原无穷乘积条件收敛.

当 $0 < p \leq \frac{1}{2}$ 时, 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}}$ 发散, 故原无穷乘积发散.

当 $p \leq 0$ 时, 由于 $\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ 不趋于零, 故原无穷乘积也发散.

【3091】 $\prod_{n=2}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^n}{\ln n} \right]$.

解 由于级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ 条件收敛及 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n}$ 发散^{*)}, 故原无穷乘积发散.

*) 当 n 充分大时, 显然有 $n > \ln^2 n$, 故 $\frac{1}{\ln^2 n} > \frac{1}{n}$. 由 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散即知 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n}$ 发散.

【3092】 $\prod_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + (-1)^n}.$

解 记 $p_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + (-1)^n}$, 则有 $\ln p_n = \ln \left[1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} \right]$. 令 $u_k = \ln p_{2k} + \ln p_{2k+1}$ ($k=1, 2, 3, \dots$), 即得

$$u_k = \ln \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2k+1}} \right) + \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2k+1}-1} \right) = \ln \left[1 - \frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}}{(\sqrt{2k+1})(\sqrt{2k+1}-1)} \right] > 0.$$

由于

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \ln \left[1 - \frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}}{(\sqrt{2k+1})(\sqrt{2k+1}-1)} \right]^{-\frac{(\sqrt{2k+1})(\sqrt{2k+1}-1)}{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}}} = 1,$$

故有

$$\begin{aligned} u_k &= -\frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}}{(\sqrt{2k+1})(\sqrt{2k+1}-1)} \ln \left[1 - \frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}}{(\sqrt{2k+1})(\sqrt{2k+1}-1)} \right]^{-\frac{(\sqrt{2k+1})(\sqrt{2k+1}-1)}{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}}} \\ &\sim -\left[\frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}}{(\sqrt{2k+1})(\sqrt{2k+1}-1)} \right] \sim \frac{1}{2k} \quad (k \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

由此可知 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 发散, 从而, 级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \ln p_n$ 发散. 因此, 原无穷乘积发散.

【3093】 $\prod_{n=1}^{\infty} n^{(-1)^n}.$

提示 令 $p_n = n^{(-1)^n}$, 注意它的子数列 $p_{2k} = 2k \rightarrow \infty$ ($k \rightarrow \infty$).

解 记 $p_n = n^{(-1)^n}$, 则有子数列

$$p_{2k} = (2k)^{(-1)^{2k}} = 2k \rightarrow \infty \quad (k \rightarrow \infty).$$

于是 $p_n \not\rightarrow 1$ ($n \rightarrow \infty$), 因此, 原无穷乘积发散.

【3094】 $\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n^{(-1)^n}}.$

解 记 $p_n = \sqrt[n]{n^{(-1)^n}}$, 则有

$$\ln p_n = \frac{1}{n} \ln n^{(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n} \ln n.$$

注意到级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ 是莱布尼茨型级数, 它条件收敛, 因此, 原无穷乘积条件收敛.

【3095】 $\prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n} \right].$

解 记 $p_n = 1 + \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n}$, 则有

$$|\ln p_n| = \frac{1}{n} \left| \ln \left[1 + \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n} \right] \right|^{\frac{n}{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}} \sim \frac{1}{n} \quad (n \rightarrow \infty).$$

因此, 可知 $\sum_{n=1}^{\infty} |\ln p_n|$ 发散. 若令 $u_n = \ln p_n$, 则有

$$u_{2k-1} = \ln \left[1 + \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \right], \quad u_{2k} = \ln \left[1 + \frac{(-1)^k}{2k} \right] \quad (k=1, 2, 3, \dots).$$

记 $a_k = u_{2k-1} + u_{2k}$, 可得

$$a_k = \ln \left[1 + \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} + \frac{(-1)^k}{2k} + \frac{(-1)^{2k-1}}{2k(2k-1)} \right] = \ln \left[1 + \frac{(-1)^{k-1}-1}{2k(2k-1)} \right] \quad (k=1, 2, 3, \dots),$$

故

$$a_{2m-1}=0, \quad a_{2m}=\ln\left[1-\frac{2}{4m(4m-1)}\right] \quad (m=1,2,3,\dots).$$

于是,级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛. 注意到 $u_k \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$, 可得 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 收敛. 因此,原无穷乘积条件收敛.

$$\text{【3096】} \quad \left(1+\frac{1}{\sqrt{1}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{7}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{9}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\dots$$

解 研究无穷级数

$$\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{1}}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{7}}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{9}}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\dots \quad (1)$$

的收敛性问题. 今将级数(1)每三项依次加括号, 考虑如此形成的新级数:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{4n-1}}\right) + \ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{4n+1}}\right) \right]. \quad (2)$$

以下将指出(2)发散, 从而, (1)也发散, 因此, 原无穷乘积发散. 现将(2)的通项记成

$$u_n = \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{4n-1}}\right) + \ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{4n+1}}\right). \quad (3)$$

则有

$$\begin{aligned} u_n &= \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \ln\left[\left(1-\frac{1}{\sqrt{4n-1}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{4n+1}}\right)\right] \\ &= \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \ln\left[1-\frac{1}{\sqrt{4n-1}}-\frac{1}{\sqrt{4n+1}}+\frac{1}{\sqrt{16n^2-1}}\right] \\ &= \ln\left\{\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left[1-\frac{\sqrt{4n-1}+\sqrt{4n+1}}{\sqrt{16n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{16n^2-1}}\right]\right\} \\ &= \ln\left[1+\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{\sqrt{4n-1}+\sqrt{4n+1}}{\sqrt{16n^2-1}}-\frac{\sqrt{4n-1}+\sqrt{4n+1}}{\sqrt{n}\sqrt{16n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{16n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{16n^2-1}}\right] \\ &= \ln\left[1+\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{2(\sqrt{n}+1)\left(\sqrt{1-\frac{1}{4n}}+\sqrt{1+\frac{1}{4n}}\right)-1}{\sqrt{16n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{16n^2-1}}\right] \\ &= \ln\left[1+\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{2(\sqrt{n}+1)\left[1-\frac{1}{8n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)+1+\frac{1}{8n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]-1}{\sqrt{16n^2-1}}+O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\right] \\ &= \ln\left[1+\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{2(\sqrt{n}+1)\left[2+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]-1}{\sqrt{16n^2-1}}+O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\right] \\ &= \ln\left[1+\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{16n^2-1}}-\frac{3}{\sqrt{16n^2-1}}+O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\right] \\ &= \ln\left[1-\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{16n^2-1}(\sqrt{16n^2-1}+4n)}-\frac{3}{\sqrt{16n^2-1}}+O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\right] \\ &= \ln\left[1-\frac{3}{\sqrt{16n^2-1}}+O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\right] = \ln(1+a_n), \end{aligned}$$

其中 $a_n = -\frac{3}{\sqrt{16n^2-1}} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$, 故 $a_n \rightarrow 0$, 且当 n 充分大时 $a_n < 0$.

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{16n^2-1}}$ 发散, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散; 因此 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n)$ 发散. 于是, 原无

穷乘积发散.

$$\text{【3097】} \left(1 + \frac{1}{1^\alpha}\right) \left(1 - \frac{1}{2^\alpha}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{3^\alpha}\right) \left(1 + \frac{1}{4^\alpha}\right) \left(1 - \frac{1}{5^\alpha}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{6^\alpha}\right) \cdots$$

解 记

$$q_1 = 1 + \frac{1}{1^\alpha}, q_2 = \left(1 - \frac{1}{2^\alpha}\right)^2, q_3 = 1 + \frac{1}{3^\alpha}, q_4 = 1 + \frac{1}{4^\alpha}, q_5 = \left(1 - \frac{1}{5^\alpha}\right)^2, q_6 = 1 + \frac{1}{6^\alpha}, \cdots$$

若记 $q_n = 1 + a_n$, 则

$$a_1 = \frac{1}{1^\alpha}, a_2 = -\frac{2}{2^\alpha} + \frac{1}{2^{2\alpha}}, a_3 = \frac{1}{3^\alpha}, a_4 = \frac{1}{4^\alpha}, a_5 = -\frac{2}{5^\alpha} + \frac{1}{5^{2\alpha}}, a_6 = \frac{1}{6^\alpha}, \cdots$$

(i) 当 $\alpha > 1$ 时, 显然

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \frac{1}{1^\alpha} + \left(\frac{2}{2^\alpha} - \frac{1}{2^{2\alpha}}\right) + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \left(\frac{2}{5^\alpha} - \frac{1}{5^{2\alpha}}\right) + \frac{1}{6^\alpha} + \cdots \quad (1)$$

是收敛的, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ 绝对收敛.

(ii) 注意当 $\alpha \leq 0$ 时, 不可能有 $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 1$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ 发散.

(iii) 今讨论 $0 < \alpha \leq 1$ 时的情形. 将原无穷乘积写为

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{1}{1^\alpha}\right) \left(1 - \frac{1}{2^\alpha}\right) \left(1 - \frac{1}{2^\alpha}\right) \left(1 + \frac{1}{3^\alpha}\right) \left(1 + \frac{1}{4^\alpha}\right) \left(1 - \frac{1}{5^\alpha}\right) \left(1 - \frac{1}{5^\alpha}\right) \\ & \cdot \left(1 + \frac{1}{6^\alpha}\right) \left(1 + \frac{1}{7^\alpha}\right) \left(1 - \frac{1}{8^\alpha}\right) \left(1 - \frac{1}{8^\alpha}\right) \left(1 + \frac{1}{9^\alpha}\right) \cdots, \end{aligned}$$

记

$$\begin{aligned} p_1 &= 1 + \frac{1}{1^\alpha}, p_2 = 1 - \frac{1}{2^\alpha}, p_3 = 1 - \frac{1}{2^\alpha}, p_4 = 1 + \frac{1}{3^\alpha}, p_5 = 1 + \frac{1}{4^\alpha}, \\ p_6 &= 1 - \frac{1}{5^\alpha}, p_7 = 1 - \frac{1}{5^\alpha}, p_8 = 1 + \frac{1}{6^\alpha}, p_9 = 1 + \frac{1}{7^\alpha}, \cdots \end{aligned}$$

又记

$$p_n = 1 + a_n^* \quad (n=1, 2, 3, \cdots).$$

为研究乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 的收敛性, 考虑通项的表达式, 有

$$a_n^* = \begin{cases} \frac{1}{(1+3k)^\alpha}, & n=4k+1, \\ -\frac{1}{(2+3k)^\alpha}, & n=4k+2 \text{ 或 } n=4k+3, \\ \frac{1}{(3+3k)^\alpha}, & n=4k+4 \quad (k=0, 1, 2, \cdots). \end{cases}$$

为考察级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^*$ 的收敛性, 可看级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{(1+3k)^\alpha} - \frac{2}{(2+3k)^\alpha} + \frac{1}{(3+3k)^\alpha} \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k$$

的收敛性, 为此, 估算通项 α_k , 有

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{1}{(1+3k)^\alpha} - \frac{2}{(2+3k)^\alpha} + \frac{1}{(3+3k)^\alpha} = \left[\frac{1}{(1+3k)^\alpha} - \frac{1}{(2+3k)^\alpha} \right] - \left[\frac{1}{(2+3k)^\alpha} - \frac{1}{(3+3k)^\alpha} \right] \\ &= \frac{\alpha}{(3k+1+\theta_1)^{\alpha+1}} - \frac{\alpha}{(3k+2+\theta_2)^{\alpha+1}} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{[3k+1+\theta(1+\theta_2-\theta_1)]^{\alpha+2}} (1+\theta_2-\theta_1), \end{aligned}$$

其中 $0 < \theta_1 < 1$, $0 < \theta_2 < 1$, $0 < \theta < 1$, 显然, 令 $\delta = 1 + \theta_2 - \theta_1$, 则有 $0 < \delta < 2$, 且 $\theta(1 + \theta_2 - \theta_1) = \theta\delta \in (0, 2)$. 因而,

$$0 < \alpha_k = \frac{\alpha(\alpha+1)\delta}{(3k+1+\theta\delta)^{\alpha+2}} \leq \frac{2\alpha(\alpha+1)}{(3k+1)^{\alpha+2}}.$$

由 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(3k+1)^{a+2}}$ 的收敛性知 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^*$ 收敛. 但 a_n^* 变号, 还需看级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{*2}$. 易见

$$a_n^{*2} = \begin{cases} \frac{1}{(1+3k)^{2a}}, & n=4k+1, \\ \frac{1}{(2+3k)^{2a}}, & n=4k+2 \text{ 或 } n=4k+3, \\ \frac{1}{(3+3k)^{2a}}, & n=4k+4 \ (k=0,1,2,\dots). \end{cases}$$

无论哪种情形, 均有

$$\frac{1}{\left(\frac{3}{4}n + \frac{9}{4}\right)^{2a}} < a_n^{*2} < \frac{1}{\left(\frac{3}{4}n + \frac{1}{4}\right)^{2a}} \quad (n=1,2,3,\dots).$$

因而当 $0 < a \leq \frac{1}{2}$ 时, 由上述左侧不等式, 从级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{3}{4}n + \frac{9}{4}\right)^{2a}}$ 的发散性, 便知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{*2}$ 发散, 从而,

$\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 此时发散. 因此, $\prod_{n=1}^{\infty} q_n$ 也发散. 当 $\frac{1}{2} < a \leq 1$ 时, 由上述不等式右侧部分, 从级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{3}{4}n + \frac{1}{4}\right)^{2a}} < +\infty$$

即知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{*2}$ 此时收敛. 从而, 相应地 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 也收敛. 因此, $\prod_{n=1}^{\infty} q_n$ 也收敛. 但由(1)式知(当 $\frac{1}{2} < a \leq 1$

时) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散, 故当 $\frac{1}{2} < a \leq 1$ 时 $\prod_{n=1}^{\infty} q_n$ 条件收敛.

【3098】 证明: 尽管级数

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \dots \quad (1)$$

发散, 而乘积

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \dots \quad (2)$$

收敛

证 设原级数(1)的通项为 u_n , 则

$$u_{2k-1} = \frac{1}{\sqrt{k+1}} + \frac{1}{k+1} \quad u_{2k} = -\frac{1}{\sqrt{k+1}} \quad (k=1,2,3,\dots).$$

令 $a_k = u_{2k-1} + u_{2k} = \frac{1}{k+1}$. 显然, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 发散, 故原级数(1)即 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 必然发散.

考虑原无穷乘积(2)所对应的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+u_n)$, 则其通项 $v_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), 且

$$v_{2k-1} = \ln(1+u_{2k-1}) = \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{k+1}} + \frac{1}{k+1}\right),$$

$$v_{2k} = \ln(1+u_{2k}) = \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) \quad (k=1,2,\dots),$$

从而,

$$b_k = v_{2k-1} + v_{2k} = \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{k+1}} + \frac{1}{k+1}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{(k+1)\sqrt{k+1}}\right).$$

因此, 级数 $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ 收敛, 从而可知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 故原无穷乘积(2)必收敛.

【3099】 证明: 尽管级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 二者发散, 而乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} (1+a_n)$ 收敛, 其中

$$\alpha_n = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{k}}, & n=2k-1, \\ \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{k} + \frac{1}{k\sqrt{k}}, & n=2k. \end{cases}$$

证 考虑 $\alpha_k = \alpha_{2k-1} + \alpha_{2k}$, 则有

$$\alpha_k = \frac{1}{k} + \frac{1}{k\sqrt{k}} \quad (k=1, 2, 3, \dots).$$

由于 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}}$ 收敛, 而 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ 发散, 即知正项级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ 发散, 从而, 原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 发散.

再记 $b_k = \alpha_{2k-1}^2 + \alpha_{2k}^2$, 则有

$$b_k = \left(\frac{1}{k}\right)^2 + \left(\frac{1}{k} + \frac{2}{k\sqrt{k}} + \frac{3}{k^2} + \frac{2}{k^2\sqrt{k}} + \frac{1}{k^3}\right)^2 = \frac{2}{k} + \frac{2}{k\sqrt{k}} + \frac{3}{k^2} + \frac{2}{k^2\sqrt{k}} + \frac{1}{k^3} = \frac{2}{k} + O\left(\frac{1}{\sqrt{k^3}}\right).$$

由级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^3}}$ 收敛, 而级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k}$ 发散, 即知正项级数 $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ 发散, 从而, 原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2$ 发散.

再考虑原无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + \alpha_n)$ 所对应的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, 其中通项 $v_n = \ln(1 + \alpha_n)$ ($n=1, 2, 3, \dots$). 考虑

$$\begin{aligned} c_k &= v_{2k-1} + v_{2k} = \ln(1 + \alpha_{2k-1}) + \ln(1 + \alpha_{2k}) \\ &= \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{k} + \frac{1}{k\sqrt{k}}\right) = \ln\left[1 - \frac{1}{k} + \frac{1}{k}\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right] = \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right). \end{aligned}$$

于是, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛. 注意到 $v_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), 从而, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛. 因此, 原无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + \alpha_n)$ 收敛.

【3100】 设 $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ (黎曼 ζ 函数) 而 p_n ($n=1, 2, \dots$) 是素数数列. 证明: $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n^x}\right)^{-1} = \zeta(x)$.

证 设 $x > 1$. 首先, 有

$$\left(1 - \frac{1}{p_n^x}\right)^{-1} = \frac{1}{p_n^x} + \frac{1}{(p_n^x)^2} + \dots + \frac{1}{(p_n^x)^n} + \dots.$$

如果把对应于不超过正整数 N 的所有素数的有限个这种级数相乘起来, 则部分乘积就等于

$$\prod_{p_n \leq N} \left(1 - \frac{1}{p_n^x}\right)^{-1} = 1 + \frac{1}{n_1^x} + \frac{1}{n_2^x} + \dots,$$

其中 n_1, n_2, \dots 是整数, 它不包含超过 N 的素因子, 显然 $1, 2, \dots, N$ 这种整数全被包含在 n_1, n_2, \dots 之中. 因此,

$$\left| \zeta(x) - \prod_{p_n \leq N} \left(1 - \frac{1}{p_n^x}\right)^{-1} \right| = \left| \zeta(x) - 1 - \frac{1}{n_1^x} - \frac{1}{n_2^x} - \dots \right| \leq \frac{1}{(N+1)^x} + \frac{1}{(N+2)^x} + \dots \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

取极限即得 $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n^x}\right)^{-1} = \zeta(x) \quad (x > 1)$.

【3101】 设 p_n ($n=1, 2, \dots$) 是素数数列, 证明: 乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)^{-1}$ 和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$ 发散 (欧拉).

证 与 3100 题的处理方法类似, 考虑部分乘积, 易见也有

$$\prod_{p_n \leq N} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n}} > \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}.$$

由于当 $N \rightarrow +\infty$ 时, $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$ 发散, 故 $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)^{-1}$ 发散, 且具有值 $+\infty$.

由上述可知, $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)$ 发散于零. 又由于 $\frac{1}{p_n} > 0$, 它始终不变号, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$ 发散.

【3102】 设 $a_n > 0$ ($n=1, 2, \dots$), 且 $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\epsilon}}\right)$ ($\epsilon > 0$), 证明: $a_n = O\left(\frac{1}{n^p}\right)$.

证 考虑无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$, 其中 $p_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p$.

首先可证 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 是收敛的. 事实上, 考察其对应级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$, 通项为

$$\begin{aligned}\ln p_n &= \ln \frac{a_{n+1}}{a_n} + p \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) = -\ln \frac{a_n}{a_{n+1}} + p \left[\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \\ &= -\ln(1 + \Delta_n) + \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = -\Delta_n + O(\Delta_n^2) + \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),\end{aligned}$$

这里 $\Delta_n = \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1-\varepsilon}}\right)$ ($\varepsilon > 0$), 故有

$$\ln p_n = -\frac{p}{n} + \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

但 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$ 收敛, 从而, 原无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 收敛, 记其值为 $k_0 = \prod_{n=1}^{\infty} p_n$, 则 $k_0 \neq 0$, 且 k_0 为一

有限正数, 再研究部分乘积 $P_N = a_1 \prod_{n=1}^N p_n$. 一方面, $P_N \rightarrow a_1 k_0 > 0$ (当 $N \rightarrow \infty$ 时); 另一方面, 由于

$$P_N = a_1 \prod_{n=1}^N \frac{a_{n+1}}{a_n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p = a_{N+1} \prod_{n=1}^N \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p,$$

注意 $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \beta_n$, 其中 $\beta_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, 故当 N 充分大时, 有

$$\begin{aligned}\ln \prod_{n=1}^N \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p &= p \sum_{n=1}^N \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = p \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} + \beta_n\right) = p \left[\ln N + C + O\left(\frac{1}{N}\right) + \sum_{n=1}^N \beta_n\right] \\ &= p \left[\ln N + C + B + O\left(\frac{1}{N}\right)\right] = p \left[\ln N + C_0 + O\left(\frac{1}{N}\right)\right],\end{aligned}$$

其中 C 为 Euler 常数, $C > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = B$ 是一常数, 而

$$\sum_{n=1}^N \beta_n = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n + O\left(\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right) = B + O\left(\frac{1}{N}\right),$$

$C_0 = C + B$ 是一常数. 于是,

$$\prod_{n=1}^N \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p = e^{p[\ln N + C_0 + O(\frac{1}{N})]} = N^p \cdot G_N,$$

其中 $G_N = e^{C_0 p + O(\frac{1}{N})} \rightarrow e^{C_0 p} > 0$ ($N \rightarrow +\infty$). 这样一来, 就有

$$\begin{aligned}0 < a_1 k_0 &= \lim_{N \rightarrow \infty} P_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[a_{N+1} \prod_{n=1}^N \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p \right] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} [a_{N+1} N^p G_N] = \lim_{N \rightarrow \infty} (a_{N+1} N^p) \cdot \lim_{N \rightarrow \infty} G_N = e^{C_0 p} \lim_{N \rightarrow \infty} (a_{N+1} N^p).\end{aligned}$$

上述式子中的各个极限运算是允许的, 因为 P_N 及 G_N 的极限存在, 且 G_N 的极限不为零, 故 $a_{N+1} N^p = \frac{P_N}{G_N}$ 的极限存在. 因此, 就有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (a_{N+1} N^p) = \frac{a_1 k_0}{e^{C_0 p}} \quad (\text{非零常数}).$$

这表明 a_{N+1} 与 $\frac{1}{N^p}$ 为同级无穷小量, 或者说, a_N 与 $\frac{1}{(N-1)^p}$ 为同级无穷小量, 但 $\frac{1}{(N-1)^p}$ 与 $\frac{1}{N^p}$ 同级, 故最后得: a_N 与 $\frac{1}{N^p}$ 是同级无穷小量, 也即当 N 充分大时, 有 $a_N = O\left(\frac{1}{N^p}\right)$.

【3103】 利用沃利斯公式证明: $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

证 沃利斯公式为 $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \frac{1}{2n+1} \right\} = \frac{\pi}{2}$, 或

$$\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 \sim \frac{2}{\pi(2n+1)}.$$

上式两端开方, 即得 $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

【3104】 证明: 表示式 $a_n = \frac{n! e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时有异于零的极限 A .

由此推出斯特林公式 $n! = A n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} (1 + \epsilon_n)$, 其中 $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0$ 和 $A = \sqrt{2\pi}$.

证 按题设我们可得 $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{e}$. 下证不等式:

$$e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} < e^{1+\frac{1}{12n(n+1)}}, \quad (1)$$

证明了这一点, 即可知 $a_{n+1} < a_n$, 从而, $\{a_n\}$ 为递减数列. 事实上, 在等式 $\ln \frac{1+x}{1-x} = 2x \left(1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + \cdots\right)$ 中

令 $x = \frac{1}{2n+1}$, 即得

$$\ln \frac{n+1}{n} = \frac{2}{2n+1} \left[1 + \frac{1}{3(2n+1)^2} + \frac{1}{5(2n+1)^4} + \cdots \right],$$

也即

$$\left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{3(2n+1)^2} + \frac{1}{5(2n+1)^4} + \cdots.$$

上式右端显然大于 1, 但小于

$$1 + \frac{1}{3} \left[\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+1)^4} + \cdots \right] = 1 + \frac{1}{12n(n+1)}.$$

因此, 我们有

$$1 < \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1 + \frac{1}{12n(n+1)}.$$

由此, 取指数(底为 e), 即得(1)式:

$$e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} < e^{1+\frac{1}{12n(n+1)}}.$$

由上述不等式, 即可推知:

$$0 < a_{n+1} < a_n \quad (n=1, 2, \cdots) \quad \text{及} \quad a_n e^{-\frac{1}{12n}} < a_{n+1} e^{-\frac{1}{12(n+1)}}.$$

由此可见, 数列 $\{a_n\}$ 为单调递减且有下界的数列, 因此, 它有有限极限 A ; 而数列 $\{a_n e^{-\frac{1}{12n}}\}$ 为单调递增且有上界: $a_n e^{-\frac{1}{12n}} < a_n < a_1$, 故也有极限. 由于 $e^{-\frac{1}{12n}} \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$, 故这两个数列有同一极限 A . 由于对任何的 n , 不等式 $a_n e^{-\frac{1}{12n}} < A < a_0$ 成立, 故在 0 与 1 之间存在这样的 θ , 使得

$$A = a_n e^{-\frac{\theta}{12n}} \quad \text{或} \quad a_n = A e^{\frac{\theta}{12n}}.$$

因此, $\frac{n! e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} = A e^{\frac{\theta}{12n}}$, 即

$$n! = A n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} e^{\frac{\theta}{12n}} \quad (\theta = \theta(n); 0 < \theta < 1), \quad \text{或} \quad n! = A n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} (1 + \epsilon_n),$$

其中 $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0$.

现在我们来确定常数 A , 将沃利斯公式

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2$$

稍加变形, 并将 $n!$ 的表达式代入, 即得

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \left\{ \frac{[(2n)!!]^2}{(2n)!} \right\}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \left\{ \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n)!} \right\}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \left\{ \frac{2^{2n} A^2 n^{2n+1} e^{-2n} e^{\frac{\theta}{6n}}}{A \cdot 2^{2n+\frac{1}{2}} n^{2n+\frac{1}{2}} e^{-2n} e^{\frac{\theta}{24n}}} \right\}^2$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2n+1} A^2 \cdot \frac{n}{2} e^{\frac{\theta}{2n}} \right) = \frac{A^2}{4}.$$

由此得 $A^2 = 2\pi$ 或 $A = \sqrt{2\pi}$ ($A > 0$).

于是,最后证得斯特林公式为

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n e^{\frac{\theta}{12n}} \quad (0 < \theta < 1).$$

用上式可估计很大的 n 时阶乘 $n!$ 的值.

【3105】 根据欧拉的定义 Γ 函数 $\Gamma(x)$ 由下面的公式来确定:

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

由这个公式出发:(1)将函数 $\Gamma(x)$ 表示为无穷乘积的形状;(2)证明: $\Gamma(x)$ 对于不为负整数的一切实数 x 皆有意义;(3)推出下面这个性质: $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$;(4)对于正整数 n 求 $\Gamma(n)$ 之值.

解 (1) 由于

$$\begin{aligned} \frac{n! n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} &= \frac{n^x}{x} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{x}{1}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n}\right)} \\ &= \frac{1}{x} \cdot \frac{\left(1+\frac{1}{1}\right)^x \left(1+\frac{1}{2}\right)^x \cdots \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^x \left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{\left(1+\frac{x}{1}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n}\right)} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}, \end{aligned}$$

$$\text{故得 } \Gamma(x) = \frac{1}{x} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{1+\frac{x}{n}}.$$

(2) 由上面 $\Gamma(x)$ 写成无穷乘积的过程,得知 $x \neq -n$ ($n=0,1,2,\cdots$),即当 x 为非负整数时 $\Gamma(x)$ 才允许写成上述形式.另一方面,由于

$$p_n = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{1+\frac{x}{n}} = 1 + a_n \quad (n=1,2,\cdots),$$

而 $a_n = \frac{x(x-1)}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$,故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛,从而,无穷乘积

$$\frac{1}{x} \prod_{n=1}^{\infty} p_n = \frac{1}{x} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{1+\frac{x}{n}}$$

绝对收敛,也即 $\Gamma(x)$ 对于 $x \neq -n$ ($n=0,1,2,\cdots$) 的一切实数 x 皆有意义.

(3) 由于

$$\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^{x+1}}{(x+1)\cdots(x+n+1)}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n! n^{x+1}}{(x+1)\cdots(x+n+1)}}{\frac{n! n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{x+n+1} = x,$$

故 $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

(4) 令 $x=n-1$,即得 $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) = \cdots = (n-1)!$.

【3106】 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可以积分,且

$$\delta_n = \frac{b-a}{n}, \quad f_n = f(a+i\delta_n) \quad (i=1,2,\cdots,n),$$

证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n (1+\delta_n f_n) = e^{\int_a^b f(x) dx}$.

证 令 $y_n = \prod_{i=1}^n (1+\delta_n f_n)$, 则

$$\ln y_n = \sum_{i=1}^n \ln(1 + \delta_n f_{in}) = \sum_{i=1}^n [f_{in} \delta_n + O(\delta_n^2)] = \sum_{i=1}^n f_{in} \delta_n + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

于是,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{i=1}^n f_{in} \delta_n + O\left(\frac{1}{n}\right) \right\} = \int_a^b f(x) dx,$$

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n (1 + \delta_n f_{in}) = e^{\int_a^b f(x) dx}$. 证毕.

【3107】 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{\prod_{i=0}^{n-1} (a+ib)}}{\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (a+ib)} = \frac{2}{e}$, 其中 $a > 0$ 和 $b > 0$.

证 记 $t = \frac{b}{a}$, 则 $t > 0$, 有

$$S_n = \frac{\sqrt[n]{\prod_{i=0}^{n-1} (a+ib)}}{\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (a+ib)} = \frac{\sqrt[n]{a^n} \sqrt[n]{\prod_{i=0}^{n-1} (1+it)}}{\frac{a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (1+it)} = \frac{\sqrt[n]{\prod_{i=0}^{n-1} (1+it)}}{\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (1+it)}.$$

注意, 当 n 充分大时, 可算得

$$\sum_{i=0}^{n-1} (1+it) = n + t \sum_{i=0}^{n-1} i = n + \frac{t}{2} (n-1)n = \frac{t}{2} n^2 + O(n).$$

记 $Q_n = \sqrt[n]{\prod_{i=0}^{n-1} (1+it)}$, 考虑

$$\begin{aligned} \ln Q_n &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln(1+it) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left[\frac{1+it}{1+nt} (1+nt) \right] = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln(1+nt) + \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \frac{1+it}{1+nt} \\ &= \ln(1+nt) + \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (1 - \Delta_i), \end{aligned}$$

其中

$$\Delta_i = 1 - \frac{1+it}{1+nt} = \frac{(n-i)t}{1+nt} \quad (i=0, 1, 2, \dots, n-1),$$

故得

$$\begin{aligned} \ln Q_n &= \ln(nt) + \ln\left(1 + \frac{1}{nt}\right) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \ln\left(1 - \frac{t}{1+nt} j\right) \\ &= \ln(nt) + O\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{tj}{1+nt}\right)^k \\ &= \ln(nt) + O\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{t}{1+nt}\right)^k \sum_{j=1}^n j^k \\ &= \ln(nt) + O\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{t}{1+nt}\right)^k \left[\frac{1}{k+1} n^{k+1} + O(n^k)\right] \\ &= \ln(nt) + O\left(\frac{1}{n}\right) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} \left(\frac{nt}{1+nt}\right)^k + O\left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{nt}{1+nt}\right)^k\right] \\ &= \ln(nt) - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \left(\frac{nt}{1+nt}\right)^k + O\left(\frac{1}{n} \ln n\right) \\ &= \ln(nt) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{nt}{1+nt}\right)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} \left(\frac{nt}{1+nt}\right)^k + O\left(\frac{1}{n} \ln n\right) \\ &= \ln(nt) + \ln\left(1 - \frac{nt}{1+nt}\right) + \left(\frac{1+nt}{nt}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} \left(\frac{nt}{1+nt}\right)^{k+1} + O\left(\frac{1}{n} \ln n\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \ln(nt) + \ln \frac{1}{1+nt} + \frac{1+nt}{nt} \left[\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s} \left(\frac{nt}{1+nt} \right)^s - \frac{nt}{1+nt} \right] + O\left(\frac{1}{n} \ln n\right) \\
&= \ln(nt) - \ln(1+nt) - \frac{1+nt}{nt} \ln\left(1 - \frac{nt}{1+nt}\right) - 1 + O\left(\frac{1}{n} \ln n\right) \\
&= \ln(nt) - \ln(1+nt) - \ln \frac{1}{1+nt} - 1 + O\left(\frac{1}{n} \ln n\right) = \ln(nt) - 1 + O\left(\frac{1}{n} \ln n\right).
\end{aligned}$$

于是, $Q_n = \frac{nt}{e} e^{O(\frac{1}{n} \ln n)}$, 因而, 有

$$S_n = \frac{Q_n}{\frac{t}{2}n + O(1)} = \frac{\frac{nt}{e} e^{O(\frac{1}{n} \ln n)}}{\frac{t}{2}n + O(1)} = \frac{2}{e} \frac{e^{O(\frac{1}{n} \ln n)}}{1 + O\left(\frac{1}{n}\right)},$$

最后得 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{2}{e} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{O(\frac{1}{n} \ln n)}}{1 + O\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{2}{e}$. 证毕.

*) 原题实际上为由序列 $\{a+ib\}$ 的几何平均与算术平均之比的极限, 分母应为 $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (a+ib)$, 而不是 $\sum_{i=0}^{n-1} (a+ib)$, 这样改更确切些.

【3108】 设 $f_n(x)$ ($n=1, 2, \dots$) 在区间 (a, b) 内为连续函数且 $|f_n(x)| \leq c_n$ ($n=1, 2, \dots$), 其中级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛. 证明: 函数 $F(x) = \prod_{n=1}^{\infty} [1+f_n(x)]$ 在区间 (a, b) 内是连续的.

证 (i) 首先证明上述乘积对任何 $x \in (a, b)$ 是收敛的. 注意级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛, 故 $c_n \rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时), 因而, $f_n(x) \rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时), 故存在正整数 N_0 , 当 $n \geq N_0$ 时, 有 $|f_n(x)| < \delta$, 此处 δ 可事先取 $(0, 1)$ 内的任一实数. 现在只要研究乘积 $\prod_{n=N_0+1}^{\infty} [1+f_n(x)]$ 的收敛性即可, 或改写

$$\prod_{n=N_0+1}^{\infty} [1+f_n(x)] = \prod_{k=1}^{\infty} [1+g_k(x)], \quad (1)$$

其中 $g_k(x) = f_{N_0+k}(x)$ ($k=1, 2, \dots$). 如能证明

$$G(x) = \prod_{k=1}^{\infty} [1+g_k(x)] \quad (2)$$

是收敛的, 以及下面再证 $G(x)$ 是连续的, 那么

$$F(x) = G(x) \prod_{n=1}^{N_0} [1+f_n(x)] \quad (3)$$

当然是收敛的而且是连续的. 今研究 (2) 式, 其中 $|g_n(x)| < \delta$, 因而, $1+g_n(x) > 0$ ($n=1, 2, \dots$). 现在考察乘积对应的另一级数 $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$. 显然, 由 $|g_n(x)| \leq c_{N_0+n}$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} c_{N_0+n}$ 收敛, 便知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ 绝对收敛. 因此, 原无穷乘积 (2) (绝对) 收敛.

(ii) 再证 $G(x)$ 的连续性. 注意当 $x \in (a, b)$ 时 $G(x) > 0$, 故可考虑它的对数函数 $L(x) = \ln G(x)$. 若能证得 $L(x)$ 为 (a, b) 内的连续函数, 则就可得知 $G(x)$ 也在 (a, b) 内连续. 由于

$$L(x) = \ln G(x) = \ln \prod_{n=1}^{\infty} [1+g_n(x)] = \sum_{n=1}^{\infty} \ln[1+g_n(x)]$$

以及 $|g_n(x)| \leq c_{N_0+n}$, $c_{N_0+n} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), 再注意到 $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1$, 即知: 当 n 充分大时 ($n > N'$), 对一切 $x \in (a, b)$ 皆有

$$|\ln[1+g_n(x)]| \leq 2|g_n(x)| \leq 2c_{n+N_0}.$$

根据 $\sum_{n=1}^{\infty} c_{n+N_0}$ 的收敛性知, $L(x)$ 为一在区间 (a, b) 内一致收敛的连续函数项级数之和, 因而 $L(x)$ 在 (a, b) 内为一连续函数. 从而, $G(x)$ 在 (a, b) 内连续. 因此, 最后得知 $F(x)$ 在 (a, b) 内连续. 证毕.

【3109】 求函数 $F(x) = \prod_{n=1}^{\infty} [1 + f_n(x)]$ 的导数之表达式, $F'(x)$ 存在的充分条件为何?

解 首先假定 $1 + f_n(x) \neq 0$ ($a < x < b, n = 1, 2, \dots$). 如果在区间 (a, b) 内的任意一点 x 上, 均有 $\{f_n(x)\}$ 绝对收敛, 也即

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| < +\infty \quad (x \in (a, b)), \quad (1)$$

那么, 显然无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} [1 + f_n(x)]$ 在 (a, b) 内(绝对)收敛且 $F(x) \neq 0$. 考虑函数

$$G(x) = \ln |F(x)|. \quad (2)$$

为研究取 $F(x)$ 的导数的计算式, 先对(2)作形式求导, 有

$$G'(x) = \frac{F'(x)}{F(x)} \quad \text{或} \quad F'(x) = F(x)G'(x). \quad (3)$$

今再研究 $G'(x)$, 即研究形式导数

$$\begin{aligned} G'(x) &= \left(\ln \left| \prod_{n=1}^{\infty} [1 + f_n(x)] \right| \right)' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \ln |1 + f_n(x)| \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} (\ln |1 + f_n(x)|)' \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f'_n(x)}{1 + f_n(x)}. \end{aligned} \quad (4)$$

为使(4)式的一切运算有意义, 我们可给出如下充分条件: $f_n(x)$ 可导, 且

$$|f'_n(x)| \leq c_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n < +\infty \quad (x \in (a, b)). \quad (5)$$

下面我们证明: 在条件(1)、(5)之下, $F(x)$ 在 (a, b) 内可导, 且

$$F'(x) = F(x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f'_n(x)}{1 + f_n(x)}. \quad (6)$$

只要证明(6)式对 (a, b) 内的任一点 x_0 成立. 设 $x_0 \in (a, b)$ 已取定. 取 a_1, b_1 使 $a < a_1 < x_0 < b_1 < b$. 首先, 证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \quad (7)$$

在 (a_1, b_1) 内一致收敛, 注意到 $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x_0)|$ 的收敛性, 为此又只要证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x) - f_n(x_0)| \quad (8)$$

在 (a_1, b_1) 内一致收敛. 但根据(5)式, 有: 当 $x \in (a_1, b_1)$ 时,

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| = |f'_n(\xi_n)(x - x_0)| \leq (b_1 - a_1)c_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (9)$$

其中 $x_0 \leq \xi_n \leq x$. 由 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 的收敛性, 根据魏尔斯特拉斯判别法知级数(8), 从而, 级数(7)在 (a_1, b_1) 内一致收敛. 于是, 必有正整数 N 存在, 使当 $n > N$ 时, 对一切 $x \in (a_1, b_1)$, 恒同时满足下面两个不等式:

$$|f_n(x)| < \frac{1}{2}, \quad (10)$$

$$|\ln[1 + f_n(x)]| \leq 2|f_n(x)|, \quad (11)$$

由(10)式与(5)式又知: 当 $n > N$ 时, 对一切 $x \in (a_1, b_1)$, 有

$$\left| \frac{f'_n(x)}{1 + f_n(x)} \right| \leq 2c_n. \quad (12)$$

根据(11)式与(12)式, 注意到级数(7)在 (a_1, b_1) 内的一致收敛性知, $\sum_{n=1}^{\infty} \ln |1 + f_n(x)|$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f'_n(x)}{1 + f_n(x)}$ 都

在 (a_1, b_1) 内一致收敛, 从而知(4)式中的逐项求导是允许的, 即 $G(x)$ 在 (a_1, b_1) 内可导, 且(4)式成立. 由(2)式知

$$|F(x)| = e^{G(x)}. \quad (13)$$

由(9)式得: 当 $a_1 < x < b_1$ 时,

$$|f_n(x)| \leq (b_1 - a_1)c_n + |f_n(x_0)| = d_n \quad (n=1, 2, 3, \dots),$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ 收敛, 故根据 3108 题的结果可知, $F(x)$ 在 (a_1, b_1) 内连续. 但前面已述 $F(x) \neq 0$, 故在 (a_1, b_1) 内或是 $F(x)$ 恒大于零, 这时(13)式为

$$F(x) = e^{G(x)} \quad (a_1 < x < b_1); \quad (14)$$

或是 $F(x)$ 恒小于零, 这时(13)式为

$$F(x) = -e^{G(x)} \quad (a_1 < x < b_1). \quad (15)$$

在(14)式成立的情形, 由 $G(x)$ 在 (a_1, b_1) 内可导知, $F(x)$ 在 (a_1, b_1) 内可导, 且[注意到(4)式]

$$F'(x) = e^{G(x)} G'(x) = F(x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f'_n(x)}{1+f_n(x)};$$

在(15)式成立的情形下, 由 $G(x)$ 在 (a_1, b_1) 内可导知, $F(x)$ 在 (a_1, b_1) 内可导, 且[注意到(4)式]

$$F'(x) = -e^{G(x)} G'(x) = F(x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f'_n(x)}{1+f_n(x)},$$

在 (a_1, b_1) 内(6)式必成立. 特别在点 x_0 成立.

总之, 在条件(1)和条件(5)之下, 再假定 $1+f_n(x) \neq 0$ ($a < x < b$, $n=1, 2, 3, \dots$) 即可推出在 (a, b) 内 $F'(x)$ 存在且公式(6)成立.

【3110】 证明: 若 $0 < x < y$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x(x+1)\cdots(x+n)}{y(y+1)\cdots(y+n)} = 0$.

证 记 $p_n = \frac{x+n}{y+n}$ ($n=1, 2, 3, \dots$). 显然, $0 < p_n < 1$. 由题意, 现在要证无穷乘积 $\frac{x}{y} \prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 发散到零. 因为部分乘积 $\prod_{k=1}^n p_k$ 是正的且递减, 故只要证明它是发散的就行了. 为此先估计一下 $p_n = 1 + a_n$, 则有

$$\begin{aligned} a_n = p_n - 1 &= \frac{1 + \frac{x}{n}}{1 + \frac{y}{n}} - 1 = \left(1 + \frac{x}{n}\right) \left(1 + \frac{y}{n}\right)^{-1} - 1 = \left(1 + \frac{x}{n}\right) \left[1 - \frac{y}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] - 1 \\ &= \left[1 - \frac{y-x}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] - 1 = -\frac{y-x}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

故当 n 适当大时, a_n 保持定号. 但由 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y-x}{n}$ 发散, 即知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. 因此, 原无穷乘积发散, 即它发散到零. 于是, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x(x+1)\cdots(x+n)}{y(y+1)\cdots(y+n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{y} \prod_{k=1}^n \frac{x+k}{y+k} = \frac{x}{y} \prod_{k=1}^{\infty} p_k = 0.$$

证毕.

§ 10. 斯特林公式

斯特林公式

$$n! = \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} e^{\frac{\theta}{12n}} \quad (0 < \theta_n < 1),$$

可用来计算当值 n 甚大时的 $n!$.

利用斯特林公式, 近似地计算:

【3111】 $\lg 100!$.

$$\begin{aligned}\text{解 } \lg 100! &= \lg \left\{ \sqrt{2\pi \cdot 100} \cdot 100^{100} e^{-100} e^{\frac{\theta}{12 \cdot 100}} \right\} \\ &= \frac{1}{2} (\lg 2 + \lg \pi + \lg 100) + 100 \lg 100 - 100 \lg e + \frac{\theta}{1200} \lg e \\ &= \frac{1}{2} (0.3010 + 0.4971 + 2) + 200 - 100 \cdot 0.4343 + 0.0004\theta \\ &= 157.9691 + 0.0004\theta,\end{aligned}$$

其中 $0 < \theta < 1$.

【3112】⁺ $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 1999$.

$$\begin{aligned}\text{解 } 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 1999 &= \frac{2000!}{2^{1000} \cdot 1000!} = \frac{\sqrt{2\pi \cdot 2000} \cdot 2000^{2000} e^{-2000} e^{\frac{\theta_1}{24000}}}{2^{1000} \sqrt{2\pi \cdot 1000} \cdot 1000^{1000} e^{-1000} e^{\frac{\theta_2}{12000}}} \\ &= 7.09 \cdot 10^{2856} e^{\frac{\theta}{12000}} \approx 7.09 \cdot 10^{2856} \left(1 + \frac{\theta}{12000}\right),\end{aligned}$$

其中 $|\theta| < 1$ ($0 < \theta_1 < 1, 0 < \theta_2 < 1$).

【3113】 $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 99}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 100}$.

$$\begin{aligned}\text{解 } \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 99}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 100} &= \frac{100!}{2^{100} (50!)^2} = \frac{\sqrt{2\pi \cdot 100} \cdot 100^{100} e^{-100} e^{\frac{\theta_1}{1200}}}{2^{100} \cdot 100\pi \cdot 50^{100} e^{-100} e^{\frac{\theta_2}{300}}} = 0.0798 e^{\frac{\theta}{300}} \\ &\approx 0.0798 \left(1 + \frac{\theta}{300}\right),\end{aligned}$$

其中 $|\theta| < 1$ ($0 < \theta_1 < 1, 0 < \theta_2 < 1$).

【3114】 C_{100}^{40} .

$$\begin{aligned}\text{解 } C_{100}^{40} &= \frac{100!}{40! \cdot 60!} = \frac{\sqrt{200\pi} \cdot 100^{100} e^{-100} e^{\frac{\theta_1}{1700}}}{\sqrt{2\pi \cdot 40} \sqrt{2\pi \cdot 60} \cdot 60^{60} \cdot 40^{40} e^{-100} e^{\frac{\theta_2}{180} + \frac{\theta_3}{720}}} = 10^{28} \cdot 1.378 e^{\frac{\theta}{288}} \\ &\approx 10^{28} \cdot 1.378 \left(1 + \frac{\theta}{288}\right),\end{aligned}$$

其中 $|\theta| < 1$ ($0 < \theta_1 < 1, 0 < \theta_2 < 1, 0 < \theta_3 < 1$).

【3115】 $\frac{100!}{20! 30! 50!}$.

$$\begin{aligned}\text{解 } \frac{100!}{20! 30! 50!} &= \frac{\sqrt{2\pi \cdot 100} \cdot 100^{100} e^{-100} e^{\frac{\theta_1}{1200}}}{\sqrt{2^3 \pi^3 20 \cdot 30 \cdot 50} \cdot 20^{20} \cdot 30^{30} \cdot 50^{50} e^{-100} e^{\frac{\theta_2}{240} + \frac{\theta_3}{360} + \frac{\theta_4}{600}}} \\ &= 10^{42} \cdot 4.792 e^{\frac{\theta}{120}} \approx 10^{42} \cdot 4.792 \left(1 + \frac{\theta}{120}\right),\end{aligned}$$

其中 $|\theta| < 1$ ($0 < \theta_1 < 1, 0 < \theta_2 < 1, 0 < \theta_3 < 1, 0 < \theta_4 < 1$).

【3116】 $\int_0^1 (1-x^2)^{50} dx$.

$$\begin{aligned}\text{解 } \int_0^1 (1-x^2)^{50} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{101} t dt = \frac{(100)!!}{(101)!!} = \frac{2^{100} \cdot (50!)^2}{101!} = \frac{2^{100} \cdot 100\pi \cdot 50^{100} e^{-100} e^{\frac{\theta_1}{300}}}{101 \sqrt{2\pi \cdot 100} \cdot 100^{100} e^{-100} e^{\frac{\theta_2}{1200}}} \\ &= \frac{10\sqrt{\pi}}{101\sqrt{2}} e^{\frac{\theta}{300}} = 0.1241 e^{\frac{\theta}{300}} \approx 0.1241 \left(1 + \frac{\theta}{300}\right),\end{aligned}$$

其中 $|\theta| < 1$ ($0 < \theta_1 < 1, 0 < \theta_2 < 1$).

【3117】 $\int_0^{2\pi} \sin^{200} x dx$.

解题思路 先将 $[0, 2\pi]$ 分成 $[0, \frac{\pi}{2}]$, $[\frac{\pi}{2}, \pi]$, $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$ 及 $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ 四个子区间, 然后对在这些子区间上

的定积分, 分别作代换 $x=t$, $x=\frac{\pi}{2}+t$, $x=t+\pi$ 及 $x=\frac{3\pi}{2}+t$, 易得

$$\int_0^{2\pi} \sin^{200} x dx = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{200} x dx.$$

最后, 利用 2281 题的结果及斯特林公式, 可得原式近似等于 $0.355 \left(1 + \frac{\theta}{600}\right)$, 其中 $|\theta| < 1$.

解 先将 $\int_0^{2\pi}$ 分成 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}$, $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$, $\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}$ 及 $\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}$ 四部分, 然后分别作代换 $x=t$, $x=t+\frac{\pi}{2}$, $x=t+\pi$, 及 $x=t+\frac{3\pi}{2}$,

再利用结果 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt$, 易得

$$\int_0^{2\pi} \sin^{200} x dx = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{200} x dx.$$

利用 2281 题的结果及斯特林公式, 最后得

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin^{200} x dx &= 4 \frac{(199)!!}{(200)!!} \frac{\pi}{2} = \frac{200!}{2^{200} (100!)^2} \cdot 2\pi = \frac{2\pi \sqrt{2\pi \cdot 200} \cdot 200^{200} e^{-200} e^{\frac{\theta_1}{2400}}}{2^{200} \cdot 200\pi \cdot 100^{200} e^{-200} e^{\frac{\theta_2}{600}}} \\ &= 0.355 e^{\frac{\theta}{600}} \approx 0.355 \left(1 + \frac{\theta}{600}\right), \end{aligned}$$

其中 $|\theta| < 1$ ($0 < \theta_1 < 1, 0 < \theta_2 < 1$).

【3118】 推出乘积 $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)$ 的渐近公式.

$$\text{解 } (2n-1)!! = \frac{2n!}{2^n n!} = \frac{\sqrt{2\pi \cdot 2n} (2n)^{2n} e^{-2n} e^{\frac{\theta_1}{24n}}}{2^n \sqrt{2\pi n n^n} e^{-n} e^{\frac{\theta_2}{12n}}} = \sqrt{2} (2n)^n e^{-n+\frac{\theta}{12n}},$$

其中 $|\theta| < 1$ ($0 < \theta_1 < 1, 0 < \theta_2 < 1$).

【3119】 若 n 甚大, 近似地计算 C_{2n}^n .

$$\text{解 } C_{2n}^n = \frac{2n(2n-1)\cdots(2n-n+1)}{n!} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{\sqrt{2\pi \cdot 2n} (2n)^{2n} e^{-2n} e^{\frac{\theta_1}{24n}}}{2\pi n n^{2n} e^{-2n} e^{\frac{\theta_2}{6n}}} = \frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}} e^{\frac{\theta}{6n}},$$

其中 $|\theta| < 1$ ($0 < \theta_1 < 1, 0 < \theta_2 < 1$).

【3120】 利用斯特林公式求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!}; \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}; \quad (3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}; \quad (4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n!}{\ln n^n}.$$

$$\text{解 } (1) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sqrt[n]{2\pi n} \sqrt[n]{n^n} e^{-1} e^{\frac{\theta}{12n}} \right] = 1.$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{2\pi n} n e^{-1} e^{\frac{\theta}{12n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e}{\sqrt[n]{2\pi n} e^{\frac{\theta}{12n}}} = e.$$

$$(3) \text{利用 3118 题的结果即得 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{(2n-1)!!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{2} 2n e^{-1} e^{\frac{\theta}{12n}}} = \frac{e}{2}.$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n!}{\ln n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}(\ln 2 + \ln \pi + \ln n) + n \ln n - n + \frac{\theta}{12n}}{n \ln n} = 1.$$

§ 11. 用多项式逼近连续函数

1° 拉格朗日插值公式 拉格朗日多项式

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)} y_i$$

具有性质 $P_n(x_i) = y_i$ ($i=0, 1, \dots, n$).

2° 伯恩斯坦多项式 若 $f(x)$ 是闭区间 $[0, 1]$ 上的连续函数, 则伯恩斯坦多项式

$$B_n(x) = \sum_{i=0}^n f\left(\frac{i}{n}\right) C_n^i x^i (1-x)^{n-i}$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时在闭区间 $[0, 1]$ 上一致收敛于函数 $f(x)$.

【3121】 求在给定点按下表取值的最低次的 n 次多项式 $P_n(x)$:

x	-2	0	4	5
y	5	1	-3	1

$P_n(-1)$, $P_n(1)$, $P_n(6)$ 近似地等于什么?

解 $x_0 = -2, x_1 = 0, x_2 = 4, x_3 = 5$;

$y_0 = 5, y_1 = 1, y_2 = -3, y_3 = 1$.

$$P_3(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} y_1 \\ + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} y_2 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} y_3.$$

以 (x_i, y_i) ($i=0, 1, 2, 3$) 代入上式, 化简即得

$$P_3(x) = 1 - \frac{55}{21}x + \frac{1}{14}x^2 + \frac{5}{42}x^3, \quad P_3(-1) = 1 + \frac{55}{21} - \frac{1}{14} - \frac{5}{42} \approx 3.43,$$

$$P_3(1) = 1 - \frac{55}{21} + \frac{1}{14} + \frac{5}{42} \approx -1.57, \quad P_3(6) = 1 - \frac{110}{7} + \frac{18}{7} + \frac{180}{7} \approx 8.43.$$

【3122】 写出经过三点: $A(x_0-h, y_{-1})$, $B(x_0, y_0)$, $C(x_0+h, y_1)$ 的抛物线方程 $y = ax^2 + bx + c$.

解 将三点的坐标代入拉格朗日插值公式, 即得

$$y = \frac{(x-x_0)(x-x_0-h)}{[(x_0-h)-x_0][(x_0-h)-(x_0+h)]} y_{-1} + \frac{(x-x_0+h)(x-x_0-h)}{[x_0-(x_0-h)][x_0-(x_0+h)]} y_0 \\ + \frac{(x-x_0+h)(x-x_0)}{[(x_0+h)-(x_0-h)][(x_0+h)-x_0]} y_1 \\ = y_0 + \frac{y_1 - y_{-1}}{2h} (x-x_0) + \frac{y_1 - 2y_0 + y_{-1}}{2h^2} (x-x_0)^2.$$

【3123】 利用数值 $x_0 = 1, y_0 = 1; x_1 = 25, y_1 = 5; x_2 = 100, y_2 = 10$, 推出开平方根: $y = \sqrt{x}$ ($1 \leq x \leq 100$) 的近似公式.

解 $y = \sqrt{x}$ 的近似公式可由拉格朗日插值公式求出:

$$y \approx \frac{(x-25)(x-100)}{(-24) \cdot (-99)} \cdot 1 + \frac{(x-1)(x-100)}{24 \cdot (-75)} \cdot 5 + \frac{(x-1)(x-25)}{99 \cdot 75} \cdot 10 \\ = 0.808 + 0.193x - 0.00101x^2.$$

例如,

$$\begin{aligned} x=4, \quad y \approx 1.564 \text{ (应为 } 2); & \quad x=9, \quad y \approx 2.463 \text{ (应为 } 3); \\ x=16, \quad y \approx 3.637 \text{ (应为 } 4); & \quad x=36, \quad y \approx 6.447 \text{ (应为 } 6); \end{aligned}$$

由此看来, 误差还较大.

【3124】 利用数值 $\sin 0^\circ = 0$, $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\sin 90^\circ = 1$, 推出如下形式的近似公式:

$$\sin x^\circ \approx ax + bx^3 \quad (0 \leq x \leq 90).$$

利用这个公式, 近似地求: $\sin 20^\circ$, $\sin 40^\circ$, $\sin 80^\circ$.

解 将 $x=30$, $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$; $x=90$, $\sin 90^\circ = 1$ 代入近似公式 $\sin x^\circ \approx ax + bx^3$, 即得联立方程组

$$\begin{cases} 30a + 27000b = \frac{1}{2}, \\ 90a + 729000b = 1. \end{cases}$$

解之, 得 $a = \frac{5}{288}$, $b = -\frac{5}{288} \left(\frac{1}{150} \right)^2$, 因此,

$$\sin x^\circ \approx \frac{5x}{288} \left[1 - \left(\frac{x}{150} \right)^2 \right].$$

由此近似公式, 可得

$$\sin 20^\circ \approx 0.341, \quad \sin 40^\circ \approx 0.645, \quad \sin 80^\circ \approx 0.994,$$

这与查表(四位数学用表)所得的

$$\sin 20^\circ = 0.3420, \quad \sin 40^\circ = 0.6428, \quad \sin 80^\circ = 0.9848,$$

近似.

【3125】 取点 $x_i = 0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1$ 为拉格朗日多项式的插值节点, 对函数 $f(x) = |x|$ 作出在闭区间 $[-1, 1]$ 上的拉格朗日插值多项式.

解 以 $x_i = 0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1$, $y_i = 0, \frac{1}{2}, 1$ 代入拉格朗日插值公式, 即得

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{x(x - \frac{1}{2})(x^2 - 1)}{(-\frac{1}{2})(-1) \cdot \frac{1}{2}(-\frac{3}{2})} \cdot \frac{1}{2} + \frac{x(x + \frac{1}{2})(x^2 - 1)}{\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{3}{2}(-\frac{1}{2})} \cdot \frac{1}{2} \\ &\quad + \frac{x(x-1)(x^2 - \frac{1}{4})}{(-1)(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-2)} \cdot 1 + \frac{x(x+1)(x^2 - \frac{1}{4})}{1 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2} \cdot 1 \\ &= \frac{x^2}{3} (7 - 4x^2) \quad (|x| \leq 1), \end{aligned}$$

此即所求的多项式.

【3126】 以拉格朗日多项式代换函数 $y(x)$, 近似地计算 $\int_0^2 y(x) dx$, 其中

x	0	0.5	1	1.5	2
$y(x)$	5	4.5	3	2.5	5

$$\begin{aligned} \text{解 } y(x) &\approx \frac{(x-0.5)(x-1)(x-1.5)(x-2)}{(-0.5)(-1)(-1.5)(-2)} \cdot 5 + \frac{x(x-1)(x-1.5)(x-2)}{0.5 \cdot (-0.5) \cdot (-1) \cdot (-1.5)} \cdot 4.5 \\ &\quad + \frac{x(x-0.5)(x-1.5)(x-2)}{1 \cdot 0.5 \cdot (-0.5) \cdot (-1)} \cdot 3 + \frac{x(x-0.5)(x-1)(x-2)}{1.5 \cdot 1 \cdot 0.5 \cdot (-0.5)} \cdot 2.5 \\ &\quad + \frac{x(x-0.5)(x-1)(x-1.5)}{2 \cdot 1.5 \cdot 1 \cdot 0.5} \cdot 5 \\ &= \left(\frac{10}{3}x^4 - \frac{50}{3}x^3 + \frac{87.5}{3}x^2 - \frac{62.5}{3}x + 5 \right) + (-12x^4 + 54x^3 - 78x^2 + 36x) \\ &\quad + (12x^4 - 48x^3 + 57x^2 - 18x) + \left(-\frac{20}{3}x^4 + \frac{70}{3}x^3 - \frac{70}{3}x^2 + \frac{20}{3}x \right) \end{aligned}$$

$$+ \left(\frac{10}{3}x^4 - 10x^3 + \frac{27.5}{3}x^2 - 2.5x \right) \\ = \frac{8}{3}x^3 - 6x^2 + \frac{4}{3}x + 5.$$

于是,

$$\int_0^2 y(x) dx \approx \int_0^2 \left(\frac{8}{3}x^3 - 6x^2 + \frac{4}{3}x + 5 \right) dx = \left(\frac{2}{3}x^4 - 2x^3 + \frac{2}{3}x^2 + 5x \right) \Big|_0^2 = \frac{22}{3} = 7 \frac{1}{3}.$$

【3127】 对于函数 x, x^2, x^3 , 试在闭区间 $[0, 1]$ 上作出伯恩斯坦多项式 $B_n(x)$.

解 对于函数 $f(x) = x$, 其伯恩斯坦多项式 $B_n(x)$ 为

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = x \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k x^k (1-x)^{n-k-1} = x[x + (1-x)]^{n-1} = x;$$

对于函数 $f(x) = x^2$, 其伯恩斯坦多项式为

$$\begin{aligned} B_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n^2} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \frac{1^2}{n^2} C_n^1 x (1-x)^{n-1} + \frac{2^2}{n^2} C_n^2 x^2 (1-x)^{n-2} + \frac{3^2}{n^2} C_n^3 x^3 (1-x)^{n-3} + \cdots \\ &\quad + \frac{(n-1)^2}{n^2} C_n^{n-1} x^{n-1} (1-x) + \frac{n^2}{n^2} C_n^n x^n \\ &= \frac{1}{n} x (1-x)^{n-1} + \frac{2(n-1)}{n} x^2 (1-x)^{n-2} + \frac{3}{n} \frac{(n-1)(n-2)}{2!} x^3 (1-x)^{n-3} + \cdots \\ &\quad + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{(n-1)!}{(n-2)!} x^{n-1} (1-x) + x^n \\ &= \frac{1}{n} (C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1) x (1-x)^{n-1} + \frac{2}{n} (C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2) x^2 (1-x)^{n-2} \\ &\quad + \frac{3}{n} (C_{n-1}^2 + C_{n-1}^3) x^3 (1-x)^{n-3} + \cdots + \frac{n-1}{n} (C_{n-1}^{n-2} + C_{n-1}^{n-1}) x^{n-1} (1-x) + x^n \\ &\quad - \left[\frac{1}{n} C_{n-1}^1 x (1-x)^{n-1} + \frac{2}{n} C_{n-1}^2 x^2 (1-x)^{n-2} + \cdots + \frac{n-1}{n} C_{n-1}^{n-1} x^{n-1} (1-x) \right] \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} - \frac{n-1}{n} x (1-x) \sum_{k=0}^{n-2} C_{n-2}^k x^k (1-x)^{n-k-2} \\ &= x - \frac{n-1}{n} x (1-x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}. \end{aligned}$$

对于函数 $f(x) = x^3$, 其伯恩斯坦多项式为

$$\begin{aligned} B_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{k^3}{n^3} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \frac{1^3}{n^3} C_n^1 x (1-x)^{n-1} + \frac{2^3}{n^3} C_n^2 x^2 (1-x)^{n-2} + \cdots + \frac{(n-1)^3}{n^3} C_n^{n-1} x^{n-1} (1-x) + x^n \\ &= \frac{1^3}{n^3} (C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1) x (1-x)^{n-1} + \frac{2^3}{n^3} (C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2) x^2 (1-x)^{n-2} + \cdots \\ &\quad + \frac{(n-1)^3}{n^3} (C_{n-1}^{n-2} + C_{n-1}^{n-1}) x^{n-1} (1-x) + x^n \\ &\quad - \left[\frac{1^3}{n^3} C_{n-1}^1 x (1-x)^{n-1} + \frac{2^3}{n^3} C_{n-1}^2 x^2 (1-x)^{n-2} + \cdots + \frac{(n-1)^3}{n^3} C_{n-1}^{n-1} x^{n-1} (1-x) \right] \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{k^3}{n^3} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} - \frac{(n-1)(n-2)}{n^2} x(1-x) \\ &\quad \cdot \left[\frac{1}{n-2} C_{n-2}^0 (1-x)^{n-2} + \frac{2}{n-2} C_{n-2}^1 x (1-x)^{n-3} + \cdots + \frac{n-1}{n-2} C_{n-2}^{n-2} x^{n-2} \right] \\ &= x^2 + \frac{x(1-x)}{n} - \frac{(n-1)(n-2)}{n^2} x(1-x) \left[\frac{1}{n-2} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{k}{n-2} C_{n-2}^k x^k (1-x)^{n-k-2} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=0}^{n-2} C_{n-2}^k x^k (1-x)^{n-2-k} \Big] \\
& = x^2 + \frac{x(1-x)}{n} - \frac{(n-1)(n-2)x(1-x)}{n^2} \left[\frac{x}{n-2} \sum_{k=0}^{n-3} C_{n-3}^k x^k (1-x)^{n-3-k} + 1 \right] \\
& = x^2 + \frac{x(1-x)}{n} - \frac{(n-1)(n-2)x(1-x)}{n^2} \left(\frac{x}{n-2} + 1 \right) \\
& = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) x^3 + \frac{3}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) x^2 + \frac{1}{n^2} x.
\end{aligned}$$

【3128】 对于在闭区间 $[a, b]$ 上的已知函数 $f(x)$, 写出伯恩斯坦多项式 $B_n(x)$ 的公式.

解 令 $a + (b-a)y = x$, 则当 $0 \leq y \leq 1$ 时 $a \leq x \leq b$, 此时

$$y = \frac{x-a}{b-a}, \quad 1-y = \frac{b-x}{b-a}, \quad f(x) = f(a + (b-a)y),$$

故 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的伯恩斯坦多项式为

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n f\left(a + (b-a)\frac{k}{n}\right) C_n^k \frac{(x-a)^k (b-x)^{n-k}}{(b-a)^n}.$$

【3129】 在闭区间 $[-1, 1]$ 上用伯恩斯坦多项式 $B_4(x)$ 逼近函数 $f(x) = \frac{|x|+x}{2}$. 作出函数 $y = \frac{|x|+x}{2}$ 和 $y = B_4(x)$ 的图像.

解 利用 3128 题的结果, 易得

$$\begin{aligned}
B_4(x) &= \sum_{k=0}^4 f\left(-1 + \frac{k}{2}\right) C_4^k \frac{(x+1)^k (1-x)^{4-k}}{2^4} \\
&= \frac{1}{2} C_4^3 \frac{(x+1)^3 (1-x)}{2^4} + 1 \cdot C_4^4 \frac{(x+1)^4}{2^4} \\
&= \frac{1}{8} (1-x)(1+x)^3 + \frac{1}{16} (1+x)^4.
\end{aligned}$$

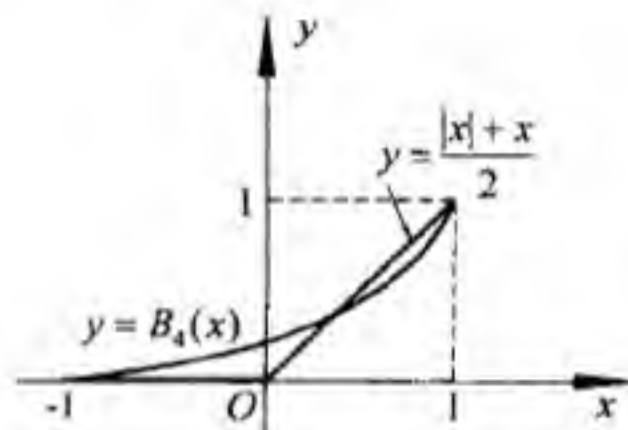


图 5.9

函数 $y = \frac{|x|+x}{2}$ 和 $y = B_4(x)$ 的图像如图 5.9 所示.

注 $y = B_4(x) = \frac{1}{8}(1-x)(1+x)^3 + \frac{1}{16}(1+x)^4$ 当 $x = -1$ 时为 0; 当 $x = 1$ 时为 1; 当 $x = 0$ 时为 $\frac{3}{16}$.

又 $y' = \frac{(1+x)^2}{4}(2-x)$, 当 $x = -1$ 时, $y' = 0$; 当 $x \in (-1, 1)$ 时, $y' > 0$, 故图像上升.

$y'' = \frac{3}{4}(1-x^2) \geq 0$, 故图像向上凹.

【3130】⁺ 在 $-1 \leq x \leq 1$ 内用偶数次的伯恩斯坦多项式逼近函数 $f(x) = |x|$.

解 利用 3128 题的结果, 即得

$$\begin{aligned}
B_{2n}(x) &= \sum_{k=0}^{2n} \left| -1 + \frac{k}{n} \right| C_{2n}^k \frac{(x+1)^k (1-x)^{2n-k}}{2^{2n}} \\
&= \frac{1}{2^{2n}} \left\{ \sum_{k=0}^n \frac{n-k}{n} C_{2n}^k (x+1)^k (1-x)^{2n-k} + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k-n}{n} C_{2n}^k (x+1)^k (1-x)^{2n-k} \right\} \\
&= \left(\frac{1-x^2}{4} \right)^n \left\{ \sum_{k=0}^n \frac{n-k}{n} C_{2n}^k \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{n-k} + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k-n}{n} C_{2n}^k \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{n-k} \right\} \\
&= \left(\frac{1-x^2}{4} \right)^n \left\{ \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} C_{2n}^{2n-k} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^k + \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} C_{2n}^{2n+k} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{-k} \right\} \\
&= \left(\frac{1-x^2}{4} \right)^n \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} C_{2n}^{2n-k} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^k + \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} C_{2n}^{n+k} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^k \right\}.
\end{aligned}$$

由于

$$C_{2n}^{n-k} + C_{2n}^{n+k} = C_{2n}^{n-k} \left[1 + \frac{(n+k)(n+k-1)\cdots(n-k+1)}{(n-k+1)(n-k+2)\cdots(n+k)} \right] = 2C_{2n}^{n-k},$$

故 $C_{2n}^{n-k} = C_{2n}^{n+k}$. 因此, 可得

$$B_{2n}(x) = \frac{1}{n} \left(\frac{1-x^2}{4} \right)^n \sum_{k=1}^n \left\{ k C_{2n}^{n-k} \left[\left(\frac{1+x}{1-x} \right)^k + \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^k \right] \right\}.$$

【3131】 对于函数 $f(x) = e^{kx}$ ($a \leq x \leq b$) 写出伯恩斯坦多项式 $B_n(x)$.

解
$$\begin{aligned} B_n(x) &= \sum_{j=0}^n e^{k(a+(b-a)\frac{j}{n})} C_n^j \frac{(x-a)^j (b-x)^{n-j}}{(b-a)^n} \\ &= \frac{e^{ka}}{(b-a)^n} \sum_{j=0}^n e^{k\frac{(b-a)j}{n}} C_n^j (x-a)^j (b-x)^{n-j} = \frac{e^{ka}}{(b-a)^n} [e^{\frac{k(b-a)}{n}} (x-a) + (b-x)]^n \\ &= e^{ka} \left[e^{\frac{k(b-a)}{n}} \frac{x-a}{b-a} + \frac{b-x}{b-a} \right]^n = e^{ka} \left[(e^{\frac{k(b-a)}{n}} - 1) \frac{x-a}{b-a} + \frac{b-x+x-a}{b-a} \right]^n \\ &= e^{ka} \left[1 + (e^{\frac{k(b-a)}{n}} - 1) \frac{x-a}{b-a} \right]^n. \end{aligned}$$

【3132】 在闭区间 $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 上, 对于函数 $f(x) = \cos x$ 计算多项式 $B_n(x)$.

解 我们有

$$\cos x = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix}). \quad (1)$$

利用 3131 题的结果 (在其中令 $a = -\frac{\pi}{2}$, $b = \frac{\pi}{2}$ 并分别令 $k=i$ 和 $k=-i$), 得 e^{ix} 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 的伯恩斯坦多项式 $B_n^{(1)}(x)$ 与 e^{-ix} 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 的伯恩斯坦多项式 $B_n^{(2)}(x)$ 分别为:

$$B_n^{(1)}(x) = e^{-\frac{\pi i}{2}} \left[1 + (e^{\frac{in}{n}} - 1) \left(\frac{x + \frac{\pi}{2}}{\pi} \right) \right]^n, \quad B_n^{(2)}(x) = e^{\frac{\pi i}{2}} \left[1 + (e^{-\frac{in}{n}} - 1) \left(\frac{x + \frac{\pi}{2}}{\pi} \right) \right]^n.$$

于是,

$$\begin{aligned} B_n^{(1)}(x) &= e^{-\frac{\pi i}{2}} \left\{ e^{\frac{\pi i}{2n}} \left[e^{-\frac{\pi i}{2n}} + (e^{\frac{\pi i}{2n}} - e^{-\frac{\pi i}{2n}}) \left(\frac{x}{\pi} + \frac{1}{2} \right) \right] \right\}^n \\ &= e^{-\frac{\pi i}{2}} e^{\frac{\pi i}{2}} \left[\cos \frac{\pi}{2n} - i \sin \frac{\pi}{2n} + 2i \sin \frac{\pi}{2n} \left(\frac{x}{\pi} + \frac{1}{2} \right) \right]^n = \left(\cos \frac{\pi}{2n} + i \frac{2x}{\pi} \sin \frac{\pi}{2n} \right)^n. \end{aligned}$$

同理可得 $B_n^{(2)}(x) = \left(\cos \frac{\pi}{2n} - i \frac{2x}{\pi} \sin \frac{\pi}{2n} \right)^n$.

于是, 根据 (1) 式, 即知 $\cos x$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上的伯恩斯坦多项式 $B_n(x)$ 为:

$$B_n(x) = \frac{1}{2} [B_n^{(1)}(x) + B_n^{(2)}(x)] = \frac{1}{2} \left[\left(\cos \frac{\pi}{2n} + i \frac{2x}{\pi} \sin \frac{\pi}{2n} \right)^n + \left(\cos \frac{\pi}{2n} - i \frac{2x}{\pi} \sin \frac{\pi}{2n} \right)^n \right].$$

应当指出, 我们也可不利用 (1) 式以及 3131 题的结果, 而利用 3128 题的结果直接写出 $\cos x$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上的伯恩斯坦多项式 $B_n(x)$:

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n \cos \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{n} \right) C_n^k \frac{\left(x + \frac{\pi}{2} \right)^k \left(\frac{\pi}{2} - x \right)^{n-k}}{\pi^n} = \sum_{k=0}^n \sin \frac{k\pi}{n} C_n^k \frac{(\pi + 2x)^k (\pi - 2x)^{n-k}}{(2\pi)^n},$$

这是 $B_n(x)$ 的另一表示式.

【3133】 证明: 在闭区间 $[-1, 1]$ 上 $|x| = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x)$, 其中

$$P_n(x) = 1 - \frac{1-x^2}{2} - \sum_{i=2}^n \frac{1 \cdot 3 \cdots (2i-3)}{2 \cdot 4 \cdots (2i)} (1-x^2)^i.$$

证 $|x| = \sqrt{x^2} = \sqrt{1-t}$, 其中 $t = 1-x^2$.

我们知道, 函数 $\sqrt{1-t}$ 按幂级数展开有

$$\begin{aligned}
\sqrt{1-t} &= 1 + \frac{1}{2}(-t) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!}(-t)^n \\
&= 1 - \frac{t}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)(-3)\cdots(-2n+3)}{n! 2^n}(-1)^n t^n \\
&= 1 - \frac{t}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)}(-1)^{2n-1} t^n \\
&= 1 - \frac{t}{2} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} t^n \quad (-1 < t < 1).
\end{aligned} \tag{1}$$

当 $t = \pm 1$ 时, 上式右端级数为

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} (\pm 1)^n = \sum_{n=2}^{\infty} a_n.$$

由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{|a_n|}{|a_{n-1}|} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{2n+2}{2n-1} - 1 \right) = \frac{3}{2} > 1,$$

故由拉比判别法可知级数 $\sum_{n=2}^{\infty} |a_n|$ 收敛, 从而, 级数 $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ 收敛. 因此, 由幂级数的阿贝尔定理知, (1) 式当 $t = \pm 1$ 时也成立, 即有

$$\sqrt{1-t} = 1 - \frac{t}{2} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} t^n \quad (-1 \leq t \leq 1). \tag{2}$$

于是, 将 $t = 1 - x^2$ 代入, 即得

$$|x| = 1 - \frac{1-x^2}{2} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} (1-x^2)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) \quad (-1 \leq x \leq 1). \tag{3}$$

证毕.

注 由幂级数的性质知, (2) 式右端的级数在 $0 \leq t \leq 1$ 上一致收敛 (实际在 $-1 \leq t \leq 1$ 上也一致收敛), 故 (3) 式中的级数在 $-1 \leq x \leq 1$ 上一致收敛. 因此, 我们实际证明了更强的结论: 当 $n \rightarrow \infty$ 时 $P_n(x)$ 在 $-1 \leq x \leq 1$ 上一致趋于 $|x|$.

【3134】 设 $f(x)$ 是对于 $-\pi \leq x \leq \pi$ 的连续函数, 而 $a_n, b_n (n=0, 1, 2, \dots)$ 是它的傅里叶系数. 证明: 费耶尔三角多项式

$$\sigma_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{i}{n}\right) (a_i \cos ix + b_i \sin ix)$$

在区间 $(-\pi, \pi)$ 上一致收敛于函数 $f(x)$.

证 首先指出, 本题结论有误, 在所设条件下, 只能断定: 对任何 $\eta > 0$, $\sigma_n(x)$ 在 $[-\pi + \eta, \pi - \eta]$ 上一致收敛于 $f(x)$, 而一般推不出 $\sigma_n(x)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 上一致收敛于 $f(x)$. 但若再假定 $f(-\pi) = f(\pi)$, 则能推出 $\sigma_n(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

今证于下. 首先, 以 $f(x)$ 在 $-\pi \leq x < \pi$ 上的函数值为基础按 2π 为周期将函数 $f(x)$ 延拓到整个 $(-\infty, +\infty)$ 上, 延拓后的函数仍记为 $f(x)$ (注意, 若原来 $f(-\pi) \neq f(\pi)$, 则延拓后的函数在 $x = \pi$ 的函数值不等于原来的函数值 $f(\pi)$, 但一个点的函数值对于下面各积分之值毫无影响). 用 $S_n(x)$ 表 $f(x)$ 的傅里叶级数的部分和, 则

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^n (a_m \cos mx + b_m \sin mx) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \left[\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^n \cos m(u-x) \right] du,$$

将 n 个等式

$$2 \sin \frac{v}{2} \cos mv = \sin \left(m + \frac{1}{2}\right) v - \sin \left(m - \frac{1}{2}\right) v \quad (m=1, 2, \dots, n)$$

相加得 $\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^n \cos mv = \frac{\sin(2n+1)\frac{v}{2}}{2 \sin \frac{v}{2}}$, 从而 (作代换 $u-x=t$),

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \frac{\sin(2n+1)\frac{u-x}{2}}{2\sin\frac{u-x}{2}} du = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+t) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} dt.$$

由于周期为 2π 的函数 $F(u)$ 在长为 2π 的闭区间 $[\lambda, \lambda+2\pi]$ 上的积分 $\int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} F(u) du$ 与 λ 无关, 故上式右端的积分 $\int_{-\pi-x}^{\pi-x}$ 可换为 $\int_{-\pi}^{\pi}$. 由此, 再将 $\int_{-\pi}^{\pi}$ 表为 $\int_{-\pi}^0 + \int_0^{\pi}$, 并在 $\int_{-\pi}^0$ 中作代换 $t = -s$, 即得表达式

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+t) + f(x-t)] \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} dt.$$

显然 $\sigma_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(x)$, 故

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+t) + f(x-t)] \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} dt.$$

由于

$$2\sin\frac{t}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t = \sum_{k=0}^{n-1} [\cos kt - \cos(k+1)t] = 1 - \cos nt = 2\sin^2 \frac{nt}{2},$$

故

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+t) + f(x-t)] \left(\frac{\sin \frac{n}{2}t}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 dt. \quad (1)$$

特别在(1)式中, 令 $f(x) \equiv 1$, 则显然这时 $S_n(x) \equiv 1$, 从而 $\sigma_n(x) \equiv 1$, 因此得下面的等式:

$$1 = \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin \frac{n}{2}t}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 dt. \quad (2)$$

(1)式减去(2)式乘 $f(x)$, 得

$$\sigma_n(x) - f(x) = \frac{1}{2n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+t) - f(x) + f(x-t) - f(x)] \left(\frac{\sin \frac{n}{2}t}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 dt. \quad (3)$$

由(3)式证明下述两个结论:

(i) 对任何 $\eta > 0$, $\sigma_n(x)$ 在 $-\pi + \eta \leq x \leq \pi - \eta$ 上一致收敛于 $f(x)$.

(ii) 若更设 $f(-\pi) = f(\pi)$, 则 $\sigma_n(x)$ 在 $-\pi \leq x \leq \pi$ 上一致收敛于 $f(x)$.

先证(i). 设已给 $\eta > 0$. 显然, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界, 故存在常数 $M > 0$, 使

$$|f(x)| \leq M \quad (-\infty < x < +\infty).$$

注意, 延拓后的函数在点 $x = \pi$, $x = -\pi$ 可能不连续, (可能有第一类不连续点), 但在 $-\pi < x < \pi$ 上肯定是连续的, 因此, 在 $[-\pi + \frac{\eta}{2}, \pi - \frac{\eta}{2}]$ 上必一致连续. 于是, 对任给的 $\epsilon > 0$, 必有 $\delta > 0$ 存在, 使对于闭区间 $[-\pi + \frac{\eta}{2}, \pi - \frac{\eta}{2}]$ 上任何两点 x', x'' , 只要 $|x' - x''| \leq \delta$, 就有 $|f(x') - f(x'')| < \frac{\epsilon}{2}$. 令 $\tau = \min\left\{\delta, \frac{\eta}{2}\right\}$. 根据(3)式, 有

$$\begin{aligned} \sigma_n(x) - f(x) &= \frac{1}{2n\pi} \int_0^{\tau} [f(x+t) - f(x) + f(x-t) - f(x)] \left(\frac{\sin \frac{n}{2}t}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 dt \\ &\quad + \frac{1}{2n\pi} \int_{\tau}^{\pi} [f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)] \left(\frac{\sin \frac{n}{2}t}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 dt \end{aligned}$$

$$=I_1+I_2; \quad (4)$$

显然, 当 $0 \leq t \leq \tau$, $-\pi + \eta \leq x \leq \pi - \eta$ 时, 有 $x+t \in [-\pi + \frac{\eta}{2}, \pi - \frac{\eta}{2}]$, $x-t \in [-\pi + \frac{\eta}{2}, \pi - \frac{\eta}{2}]$, 从而,

$$|f(x+t)-f(x)| < \frac{\epsilon}{2}, \quad |f(x-t)-f(x)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

因此(再注意到(2)式), 当 $-\pi + \eta \leq x \leq \pi - \eta$ 时, 有

$$|I_1| \leq \frac{1}{2n\pi} \int_0^\tau [|f(x+t)-f(x)| + |f(x-t)-f(x)|] \left(\frac{\sin \frac{n}{2}t}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 dt < \frac{\epsilon}{2} \cdot \frac{1}{n\pi} \int_0^\tau \left(\frac{\sin \frac{n}{2}t}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 dt < \frac{\epsilon}{2}. \quad (5)$$

另一方面, 当 $\tau \leq x \leq \pi$ 时, 有 $\left(\frac{\sin \frac{n}{2}t}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 \leq \frac{1}{\sin^2 \frac{\tau}{2}}$. 于是, 当 $-\infty < x < +\infty$ 时, 有

$$|I_2| \leq \frac{1}{2n\pi} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{\tau}{2}} \int_\tau^\pi 4M dt < \frac{2M}{n \sin^2 \frac{\tau}{2}}. \quad (6)$$

由(4)、(5)、(6)诸式可知: 当 $-\pi + \eta \leq x \leq \pi - \eta$ 时, 有

$$|\sigma_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{2M}{n \sin^2 \frac{\tau}{2}} \quad (n=1, 2, \dots).$$

令 $N = \left[\frac{4M}{\epsilon \sin^2 \frac{\tau}{2}} \right]$, 则当 $n > N$ 时, 对一切 $x \in [-\pi + \eta, \pi - \eta]$, 恒有 $|\sigma_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. 由此

可知, $\sigma_n(x)$ 在 $[-\pi + \eta, \pi - \eta]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

再证(II), 若原来给定的 $[-\pi, \pi]$ 上的连续函数 $f(x)$ 满足 $f(-\pi) = f(\pi)$, 则前述延拓出去后的函数 $f(x)$ 是整个 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数. 因此, 在 $[-2\pi, 2\pi]$ 上必一致连续. 于是, 对于任给的 $\epsilon > 0$, 必有 $\tau > 0$ 存在(可取 $\tau < \pi$), 使对于 $[-2\pi, 2\pi]$ 中的任何两点 x', x'' , 只要 $|x' - x''| \leq \tau$, 就有

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\epsilon}{2}.$$

以下的证明和(I)对应部分类似. 首先, 对刚才确定的 τ , 写出(4)式. 显然, 当 $0 \leq t \leq \tau$, $-\pi \leq x \leq \pi$ 时, 有 $x+t \in [-2\pi, 2\pi]$, $x-t \in [-2\pi, 2\pi]$, 故

$$|f(x+t)-f(x)| < \frac{\epsilon}{2}, \quad |f(x-t)-f(x)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

从而, 当 $-\pi \leq x \leq \pi$ 时(5)式成立. 同样(6)式成立. 于是, 当 $n > N = \left[\frac{4M}{\epsilon \sin^2 \frac{\tau}{2}} \right]$ 时, 对一切 $x \in [-\pi, \pi]$, 恒有

$$|\sigma_n(x) - f(x)| < \epsilon,$$

故 $\sigma_n(x)$ 在 $-\pi \leq x \leq \pi$ 上一致收敛于 $f(x)$.

最后, 我们举例说明, 若 $f(-\pi) \neq f(\pi)$, 则一般不能断定 $\sigma_n(x)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 内一致收敛于 $f(x)$. 例如, 设

$$f(x) = x \quad (-\pi \leq x \leq \pi).$$

我们证明这时的 $\sigma_n(x)$ 在 $-\pi < x < \pi$ 内不一致收敛于 $f(x)$. 用反证法, 假定 $\sigma_n(x)$ 在 $-\pi < x < \pi$ 内一致收敛于 $f(x) = x$. 由傅里叶级数的收敛性定理(即狄利克雷定理)知,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x) \quad (-\pi \leq x \leq \pi), \quad (7)$$

这里

$$S(x) = \begin{cases} f(x) = x, & -\pi < x < \pi, \\ \frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2} = 0, & x = \pm\pi. \end{cases}$$

由此可知, $S(x)$ 在点 $x=\pi$ 和 $x=-\pi$ 不连续, 但另一方面, 根据(7)式, 利用 138 题的结果知,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x) = S(x) \quad (-\pi \leq x \leq \pi), \quad (8)$$

由反证法的假定, $\sigma_n(x)$ 在 $-\pi < x < \pi$ 内一致收敛于 $S(x)$ (在 $-\pi < x < \pi$ 内, $f(x) = x = S(x)$). 而由(8)式, 当 $x=\pi$ 和 $x=-\pi$ 时, $\sigma_n(x)$ 也收敛于 $S(x)$, 故知 $\sigma_n(x)$ 在 $-\pi \leq x \leq \pi$ 上一致收敛于 $S(x)$. 显然, $\sigma_n(x)$ 都是 x 的连续函数 ($-\pi \leq x \leq \pi$). 由此可知, 极限函数 $S(x)$ 也必在 $-\pi \leq x \leq \pi$ 上连续; 此与 $S(x)$ 在 $x=\pi$ 和 $x=-\pi$ 不连续的事实相矛盾, 此矛盾证明了 $\sigma_n(x)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 内收敛于 $f(x) = x$ 不是一致的.

本题证毕.

【3135】 对于函数 $f(x) = |x|$ ($-\pi \leq x \leq \pi$), 作出费耶尔多项式 $\sigma_{2n-1}(x)$.

解 由于 $f(x)$ 是偶函数, 故

$$b_n = 0 \quad (n=1, 2, \dots),$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x dx = \pi,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos nx dx = \frac{2}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1] \quad (n=1, 2, \dots),$$

故 $a_{2k} = 0$, $a_{2k-1} = -\frac{4}{(2k-1)^2 \pi}$ ($k=1, 2, \dots$). 于是,

$$\begin{aligned} \sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^{2n-1} \left(1 - \frac{i}{2n-1}\right) a_i \cos ix = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{2k-1}{2n-1}\right) \left[-\frac{4}{(2k-1)^2 \pi}\right] \cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{2n-1} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}. \end{aligned}$$